Cvičení 6 - gravitační pole, Keplerovy zákony

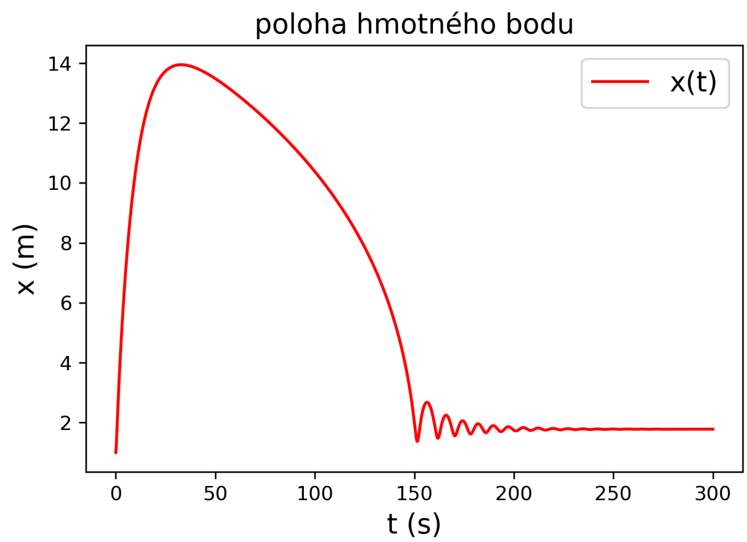
1. Jednostupňová raketa vypuštěná vertikálně vzhůru se po dobu $t_1 = 50$ s pohybuje se zrychlením $2g$. Určete maximální výšku y_{max}, kterou raketa dosáhne. Vypočítejte celkovou dobu letu t od vypuštění do návratu na zem. Jakou část hmotnosti rakety η tvoří palivo, pokud rychlost výtoku spalovaných plynů vůči raketě je $v_e = 5000$ m s^{-1}? Odpor vzduchu a změnu gravitačního zrychlení s výškou zanedbejte.

[*řešení:* Raketa dosáhne výšky $y_{max} = 3gt_1^2 = 73.6$ km a dopadne zpátky na zem za $t = (3 + \sqrt{6})t_1 = 272.5$ s. Palivo tvoří $\eta = 25.5$ % hmotnosti rakety.]

2. Na hmotný bod o hmotnosti $m = 1$ kg působí síla, která ho přitahuje do počátku soustavy souřadnic, a současně síla, která ho odpuzuje. Přitažlivá síla F_+ závisí na vzdálenosti od počátku r jako $F_+(r) = h/r^2$, odpudivá síla F_- klesá se vzdáleností r jako $F_-(r) = k/r^6$. Při pohybu je hmotný bod zpomalován tlumící silou F_0 úměrnou rychlosti v jako $F_0(v) = lv$.

Najděte rovnovážnou polohu r_0 hmotného bodu, tj. vzdálenost od středu ve které je výslednice sil působících na hmotný bod nulová, pokud je $h = 1$ N m^2, $k = 10$ N m^6 a $l = 0.1$ N s m^{-1}.

Nakreslete trajektorii hmotného bodu, který se v čase $t = 0$ nachází v klidu ve vzdálenosti $r = 1$ m od počátku.



[*řešení:* Rovnovážná poloha je ve vzdálenosti $r_0 = \sqrt[4]{\frac{k}{h}} = 1.78$ m od počátku.]

3. Mezinárodní vesmírná stanice (ISS) obíhá kolem Země po přibližně kruhové dráze ve výšce $h = 408$ km nad povrchem Země a s frekvencí $f = 15.7$ oběhů za den. Vypočítejte velikost gravitačního zrychlení a_g na stanici. Proč se posádka na stanici nachází ve stavu bez tíže?

[*řešení:* Gravitační zrychlení je $a_g = \kappa \frac{M_Z}{(R_Z+h)^2} = 8.71\ \mathrm{m\,s^{-2}}$, odstředivé zrychlení je $a_{od} = 4\pi^2(R_Z + h)f^2 = 8.83\ \mathrm{m\,s^{-2}}$.]

4. Poloměr Země je $R_Z = 6371$ km, Měsíce $R_M = 1737$ km a jejich hmotnosti jsou v poměru $M_Z/M_M = 81.3$. Určete velikost gravitačního zrychlení g_M na povrchu Měsíce, když na Zemi je $g_Z = 9.81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$

[*řešení:* $g_M = g_Z \frac{M_M}{M_Z} \frac{R_Z^2}{R_M^2} = 1.62\ \mathrm{m\,s^{-2}}$]

5. Jaká je první kosmická rychlost na Zemi a na Měsíci?

[*řešení:* Na Zemi $v_{I,Z} = \sqrt{g_Z R_Z} = 7.9\ \mathrm{km\,s^{-1}}$, na Měsíci $v_{I,M} = \sqrt{g_M R_M} = v_{I,Z}\sqrt{\frac{M_M}{M_Z}\frac{R_Z}{R_M}} = 1.68\ \mathrm{km\,s^{-1}}$.]

6. Kdyby se Země najednou zastavila na své dráze, za jakou dobu τ by dopadla do Slunce?

[*řešení:* $\tau = \frac{\sqrt{2}}{8}T = 64.5$ dne. $T = 1$ rok je oběžná doba Země kolem Slunce.]

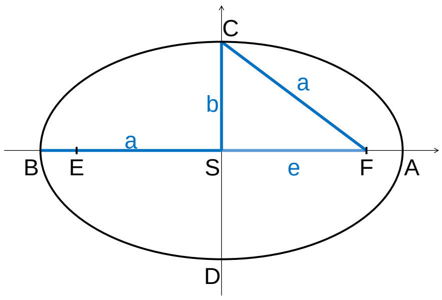
7. Halleyova kometa přiletěla k Zemi naposledy v roce 1986. Bylo to po sedmé od roku 1456. Když Halleyova kometa procházela periheliem 19.4. 1910 byla naměřena její vzdálenost od Slunce $r_{min} = 0.60$ AU. Jak daleko je Halleyova kometa od Slunce v afeliu? Jaká je numerická excentricita ε její dráhy? Jaký je poměr její největší a nejmenší orbitální rychlosti?

[*řešení:* Vzdálenost od Slunce v afeliu je $r_{max} = 2R\left(\frac{\tau}{T}\right)^{\frac{2}{3}} - r_{min} = 35.2$ AU, numerická excentricita dráhy je $\varepsilon = 1 - \frac{r_{min}}{R}\left(\frac{\tau}{T}\right)^{-\frac{2}{3}} = 0.966$, poměr maximální a minimální orbitální rychlosti je $\frac{v_{max}}{v_{min}} = \frac{2R}{r_{min}}\left(\frac{\tau}{T}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 = 58.7$.
$\tau = \frac{1986-1456}{7} = 75.7$ let je průměrná oběžná doba Halleyovy komety kolem Slunce. $R = 1$ AU je střední vzdálenost Země od Slunce, $T = 1$ rok je oběžná doba Země kolem Slunce.]

Základní vztahy a údaje

vlastnosti elipsy

hlavní poloosa	$a = \|AS\| = \|BS\|$
vedlejší poloosa	$b = \|CS\| = \|DS\|$
excentricita	$e = \|ES\| = \|FS\|$
	$e^2 = a^2 - b^2$
numerická excentricita	$\varepsilon = \frac{e}{a}$



eliptická trajektorie

perihelium	$r_{min} = \|AF\| = a(1 - \varepsilon)$
afelium	$r_{max} = \|BF\| = a(1 + \varepsilon)$
hlavní poloosa	$a = (r_{min} + r_{max})/2$
excentricita	$e = (r_{max} - r_{min})/2$

fyzikální zákony a rovnice

Newtonův gravitační zákon	$\vec{F} = -\kappa \frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$
Druhý Keplerův zákon	$\frac{1}{2} r v_\varphi = \text{konst.}$
Třetí Keplerův zákon	$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3$
Ciolkovského rovnice (bez gravitace)	$\Delta V = v_e \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right)$
Ciolkovského rovnice (s gravitací)	$\Delta V + gT = v_e \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right)$

fyzikální konstanty

gravitační konstanta κ	6.67×10^{-11} N m^2 kg^{-2}
střední vzdálenost Země od Slunce (1 AU)	149.6×10^6 km
numerická excentricita oběžné dráhy Země	0.0167
poloměr Země	6371 km
poloměr Měsíce	1737 km
hmotnost Země	5.97×10^{24} kg
hmotnost Měsíce	7.35×10^{22} kg