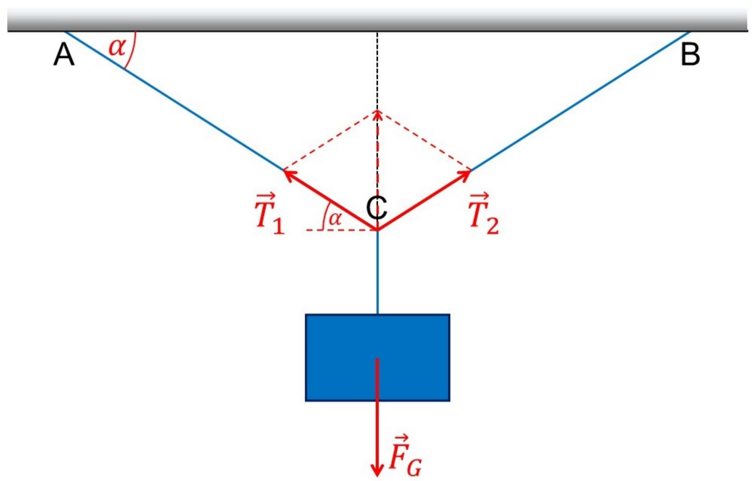
Příklad 5.1

Na závaží působí svisle dolů tíhová síla o velikosti $F_G = mg$, kterou si rozložíme na napěťové (tahové) síly $\vec{T}_1$ a $\vec{T}_2$. V x-ovém směru (vodorovný směr) je výsledná síla nulová, neboli:

$$\begin{aligned} T_{1x} + T_{2x} &= 0 \\ T_1 \cos\alpha - T_2 \cos\alpha &= 0 \\ &\Rightarrow T_1 = T_2 = T, \end{aligned}$$

kde úhel, který svírá drát s vodorovnou rovinou AB, jsme označili jako α.



Velikosti napěťových sil T_1 a T_2 jsou tedy stejné. V y-ovém směru (svislý směr) má výslednice napěťových sil stejnou velikost a opačný směr jako síla tíhová. Výslednice všech 3 sil $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ a $\vec{F}_G$ je nulová, nedochází tedy k pohybu závaží.

$$\begin{aligned} T_{1y} + T_{2y} &= mg \\ T\sin\alpha + T\sin\alpha &= mg \\ T &= \frac{mg}{2\sin\alpha} \end{aligned}$$

Zbývá vypočítat sinus úhlu α pomocí trojúhelníku ACB.

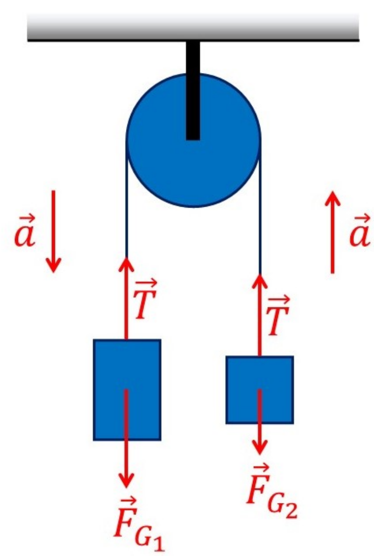
$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\frac{1}{2}\,|AB|}{|AC|} \\ \cos\alpha &= \frac{\frac{d}{2}}{\frac{l}{2}} \\ \cos\alpha &= \frac{d}{l} \\ \sin\alpha &= \sqrt{1-\cos^2\alpha} \\ \sin\alpha &= \sqrt{1-\frac{d^2}{l^2}} \end{aligned}$$

Dohromady tedy je velikost napěťových sil T rovna:

$$T = \frac{mg}{2\sin\alpha}$$
$$T = \frac{mg}{2\sqrt{1-\frac{d^2}{l^2}}}$$
$$T \doteq 283.2 \text{ N}$$

Příklad 5.2

Pro rovnováhu na pevné kladce platí rovnost $F_1 = F_2$, neboli rovnost sil působící vlevo a síly působící vpravo. Na každé závaží působí svisle dolů tíhová síla $\vec{F}_G$ a opačným směrem napěťová síla vlákna $\vec{T}$, která má ve všech místech stejnou velikost. Závaží m_1 a m_2 se pohybují se stejným zrychlením a, které udává 2. Newtonův zákon. Předpokládejme pohyb levého (těžšího) závaží dolů a pohyb pravého (lehčího) závaží nahoru.



$$\begin{aligned} m_1 a &= F_{G_1} - T \qquad \text{(dolů)} \\ m_2 a &= T - F_{G_2} \qquad \text{(nahoru)} \end{aligned}$$

$$(m_1 + m_2)a = m_1 g - m_2 g$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

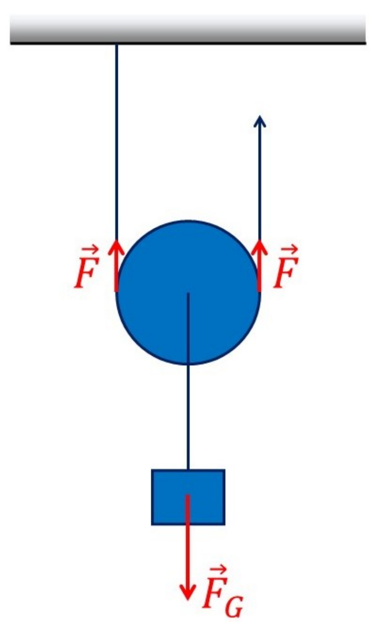
Vidíme, že při rovnosti hmotností $m_1 = m_2$ je zrychlení nulové a soustava je v rovnováze. Velikost napěťové síly T získáme dosazením zrychlení a do pohybové rovnice pro první nebo pro druhé závaží.

$$
\begin{aligned}
m_1\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g &= m_1 g - T\\
T &= m_1\frac{m_1+m_2-m_1+m_2}{m_1+m_2}g\\
T &= \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_2\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g &= T - m_2 g\\
T &= m_2\frac{m_1-m_2+m_1+m_2}{m_1+m_2}g\\
T &= \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g
\end{aligned}
$$

Příklad 5.3

Pro rovnováhu na volné kladce platí rovnost $F_1 = 2F_2$, daná rovností momentů působících sil. Neboli síla působící dolů na střed volné kladky je rovna dvojnásobku síly, kterou je kladka tažena vzhůru. Na závaží působí svisle dolů tíhová síla $\vec{F_G}$ a opačným směrem dvojnásobek působící síly $\vec{F}$. Pohyb závaží se zrychlením a udává 2. Newtonův zákon.

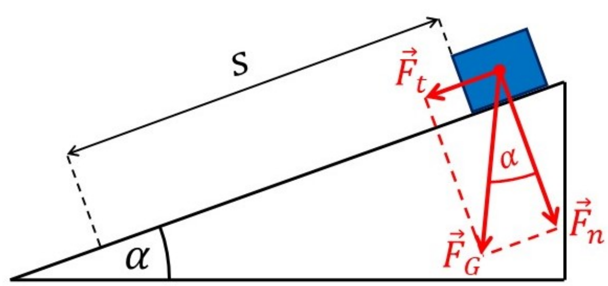


$$ma = F_G - 2F \qquad \text{(nahoru)}$$
$$a = g - \frac{2F}{m}$$
$$ma = 2F - F_G \qquad \text{(dolů)}$$
$$a = \frac{2F}{m} - g$$

Opět vidíme, že při rovnosti sil $F_G = 2F$ je zrychlení nulové a soustava je v rovnováze.

Příklad 5.4

Tíhovou sílu, působící na těleso si rozložíme na tečnou a normálovou složku $\vec{F_t}$ a $\vec{F_n}$ podle obrázku. Velikosti sil F_t a F_n si vyjádříme pomocí funkcí sinus a kosinus jako:



$$F_t = F_G \sin\alpha = mg\sin\alpha,$$
$$F_n = F_G \cos\alpha = mg\cos\alpha.$$

Tečná síla je zodpovědná za zrychlený pohyb tělesa po nakloněné rovině, zatímco normálová síla udává třecí sílu $F_s = f \cdot F_n$, která působí proti směru pohybu tělesa. V případě, kdy zanedbáváme tření, je zrychlení tělesa:

$$a = \frac{F_t}{m} = g\sin\alpha,$$

v případě, kdy uvažujeme tření, je výsledná síla, působící na těleso rovna rozdílu tečné a třecí síly a jeho zrychlení je tedy:

$$a = \frac{F_t - F_s}{m} = g\sin\alpha - fg\cos\alpha.$$

V obou případech koná těleso rovnoměrně zrychlený pohyb, jehož dráhu vypočítáme jako

$$s = \frac{1}{2}at^2$$
$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

Pro případ bez tření je čas t:

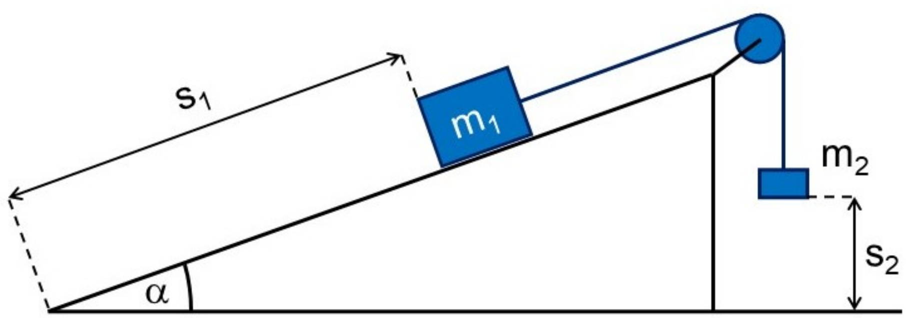
$$t = \sqrt{\frac{2s}{g \sin \alpha}},$$

v případě působení třecí síly je čas t:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g(\sin \alpha - f \cos \alpha)}},$$

což také odpovídá nulovému koeficientu smykového tření $f = 0$.

Příklad 5.5



(a) V prvním případě předpokládáme, že první závaží se bude pohybovat po nakloněné rovině dolů se zrychlením a, zatímco druhé závaží bude se stejným zrychlením stoupat nahoru. Na závaží m_1 působí tečná složka tíhové síly $F_{t_1} = F_{G_1} \sin \alpha$ ve směru jeho pohybu a proti směru pohybu tahová síla T vlákna, která má ve všech místech stejnou velikost. Na závaží m_2 působí tahová síla T vlákna ve směru jeho pohybu a tíhová síla F_{G_2} proti směru pohybu. Pohybové rovnice pro pevnou kladku mají tvar:

$$\begin{aligned} m_1 a &= F_{t_1} - T \qquad &\text{(dolů)} \\ m_2 a &= T - F_{G_2} \qquad &\text{(nahoru)} \end{aligned}$$

$$(m_1 + m_2)a = m_1 g \sin \alpha - m_2 g$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_1 \sin \alpha - m_2}{m_1 + m_2} g$$

Ze známého vztahu pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu s nulovou počáteční rychlostí můžeme vyjádřit neznámou dobu pohybu t_1.

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2}at_1^2 \\ \Rightarrow t_1 &= \sqrt{\frac{2s_1}{a}} \\ t_1 &= \sqrt{\frac{2s_1}{g}\frac{m_1+m_2}{m_1\sin\alpha - m_2}} \\ t_1 &\doteq 2.62\ \mathrm{s} \end{aligned}$$

Velikost tahové síly získáme dosazením vztahu pro zrychlení do pohybové rovnice např. pro první závaží.

$$\begin{aligned} m_1\frac{m_1\sin\alpha - m_2}{m_1+m_2}g &= m_1 g\sin\alpha - T \\ T &= m_1\frac{m_1\sin\alpha + m_2\sin\alpha - m_1\sin\alpha + m_2}{m_1+m_2}g \\ T &= \frac{m_1m_2(1+\sin\alpha)}{m_1+m_2}g \\ T &\doteq 18.8\ \mathrm{N} \end{aligned}$$

(b) Ve druhém případě předpokládáme, že první závaží se bude pohybovat po nakloněné rovině nahoru se zrychlením a, zatímco druhé závaží bude se stejným zrychlením klesat dolů. Působící síly jsou totožné jako v případě (a), zatímco pohyb obou závaží, a tudíž i směr jejich zrychlení, je opačný Pohybové rovnice pro pevnou kladku mají tvar:

$$\begin{aligned} m_1a &= T - F_{t_1} \qquad \text{(nahoru)} \\ m_2a &= F_{G_2} - T \qquad \text{(dolů)} \end{aligned}$$

$$(m_1+m_2)a = m_2g - m_1g\sin\alpha$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_2 - m_1\sin\alpha}{m_1+m_2}g$$

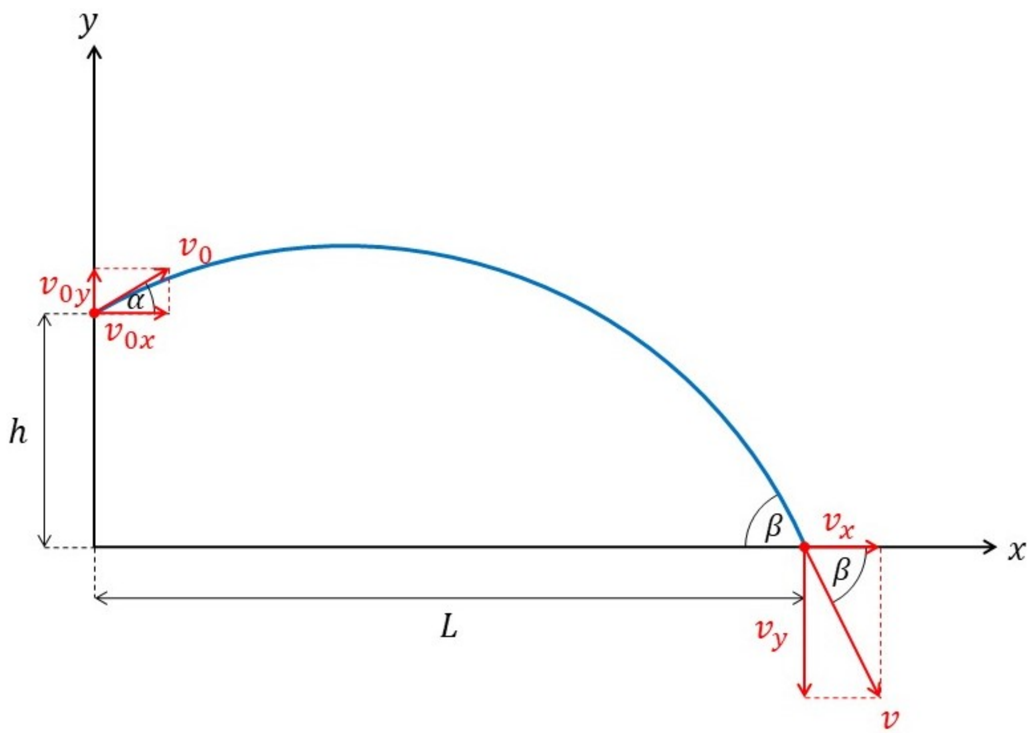
Podobně jako v předchozím případě můžeme pomocí známé dráhy rovnoměrně zrychleného pohybu určit dobu pohybu t_2. Ze známého vztahu pro dráhu s nulovou počáteční rychlostí můžeme vyjádřit neznámou dobu pohybu

$$\begin{aligned} s_2 &= \frac{1}{2}at_2^2 \\ \Rightarrow t_1 &= \sqrt{\frac{2s_2}{a}} \\ t_2 &= \sqrt{\frac{2s_2}{g}\frac{m_1+m_2}{m_2 - m_1\sin\alpha}} \\ t_2 &\doteq 2.22\ \mathrm{s} \end{aligned}$$

Velikost tahové síly získáme dosazením vztahu pro zrychlení do pohybové rovnice tentokrát např. pro druhé závaží.

$$
\begin{aligned}
m_2\frac{m_2 - m_1\sin\alpha}{m_1+m_2}g = m_2 g - T \\
T &= m_2\frac{m_1 + m_2 - m_2 + m_1\sin\alpha}{m_1+m_2}g \\
T &= \frac{m_1 m_2(1+\sin\alpha)}{m_1+m_2}g \\
T &\doteq 18.8\ \mathrm{N}
\end{aligned}
$$

Příklad 5.6



Na šíp po vystřelení působí tíhová síla, která mu uděluje zrychlení $-g$ ve svislém směru. Pohybovou rovnici pro šíp, který reprezentujeme hmotným bodem, můžeme tedy napsat takto:

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= 0 \\
\ddot{y} &= -g
\end{aligned}
$$

s počátečními podmínkami

$$x(t=0) = 0$$
$$y(t=0) = h$$
$$v_x(t=0) = v_0 \cos\alpha$$
$$v_y(t=0) = v_0 \sin\alpha$$

Vyřešením pohybových rovnic s těmito počátečními podmínkami dostáváme trajektorii šípu:

$$x(t) = v_0 t \cos\alpha, \tag{1}$$
$$y(t) = h + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2. \tag{2}$$

(a) Označíme si souřadnice bodu, kde šíp dopadl na zem, jako $[x_f, y_f] = [L, 0]$. Z první rovnice si můžeme vyjádřit čas jako

$$t_f = \frac{L}{v_0 \cos\alpha}$$

a dosadit ho do druhé rovnice:

$$y_f = h + v_0 t_f \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_f^2$$
$$0 = h + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} L - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} L^2.$$

Poslední rovnice je kvadratickou rovnicí pro x-ovou souřadnici bodu dopadu šípu a její kořeny jsou L_1 a L_2.

$$L = \frac{1}{2\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}} \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \pm \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 4\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} h} \right)$$
$$L_1 = \frac{v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2\alpha}} \right)$$
$$L_2 = \frac{v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2\alpha}} \right)$$

Kořen L_2 je záporný a odpovídá zápornému času (před vystřelením šípu), můžeme ho proto ignorovat. Šíp tedy dopadne na zem ve vzdálenosti

$$L = L_1 = \frac{v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2\alpha}} \right) = 281 \text{ m}.$$

(b) Složky rychlosti vypočítáme derivací rovnic (1) a (2):

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha$$
$$v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt.$$

Úhel β, pod kterým se šíp zabodne do země, je určen složkami rychlosti v čase dopadu t_f.

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{|v_y(t_f)|}{|v_x(t_f)|} = \frac{|v_0 \sin\alpha - g t_f|}{v_0 \cos\alpha}$$

Čas dopadu šípu t_f dopočítáme pomocí vzdálenosti L

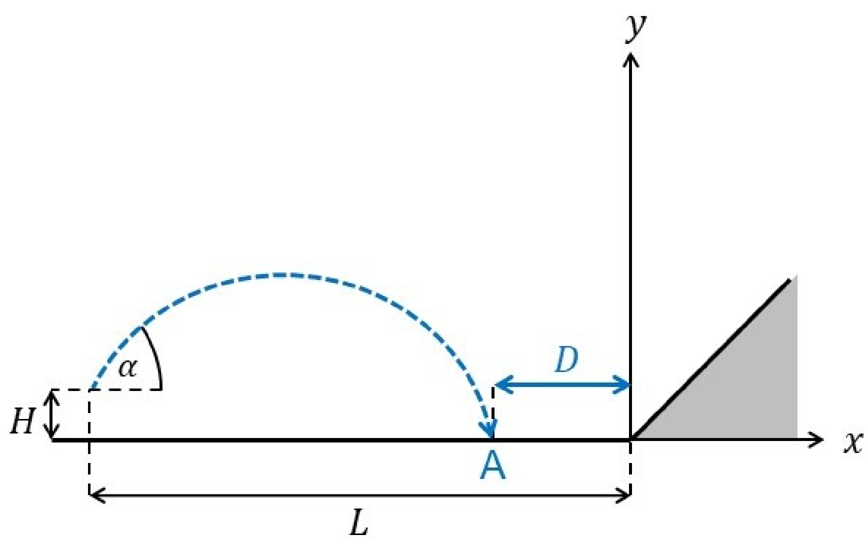
$$t_f = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2\alpha}}\right)$$

a dosadíme do předchozího vztahu:

$$\mathrm{tg}\beta = \mathrm{tg}\alpha\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2\alpha}}.$$

Po dosazení číselných hodnot dostáváme $\beta = 28.9°$.

Příklad 4.7



Na oštěp po vyhození působí tíhová síla, která mu uděluje zrychlení $-g$ ve svislém směru. Pohybové rovnice pro oštěp, který reprezentujeme hmotným bodem, můžeme tedy napsat jako:

$$\ddot{x} = 0$$
$$\ddot{y} = -g$$

s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} x(t=0) &= -L \\ y(t=0) &= H \\ v_x(t=0) &= v_0 \cos\alpha \\ v_y(t=0) &= v_0 \sin\alpha \end{aligned}$$

Jejich vyřešením dostáváme trajektorii letu oštěpu:

$$x = v_0 t \cos\alpha - L, \tag{1}$$

$$y = H + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2. \tag{2}$$

Oštěp se zabodne do země ještě před kopcem v bodě A se souřadnicemi $[x_A, y_A] = [-D, 0]$. Rovnice (2) má potom tvar kvadratické rovnice

$$0 = H + v_0 t_A \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_A^2$$

s kořeny

$$\begin{aligned} t_{A,12} &= \frac{1}{g}\left(v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2Hg}\right) \\ t_{A,12} &= \frac{v_0 \sin\alpha}{g}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2Hg}{v_0^2 \sin^2\alpha}}\right), \end{aligned} \tag{3}$$

kde zápornému času t_a odpovídá okamžik před vyhozením oštěpu, zatímco kladná hodnota t_a je dobou letu. Dosadíme-li tuto hodnotu do rovnice (1), dostaneme rovnou vzdálenost D od paty kopce.

$$\begin{aligned} -D &= v_0 t_A \cos\alpha - L \\ D &= L - \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2Hg}{v_0^2 \sin^2\alpha}}\right) \\ D &= 15.2 \text{ m} \end{aligned} \tag{4}$$

Oštěp se tedy zabodne před patou kopce ve vzdálenosti 15.2 m.