Příklad 4.1

Zapišme si funkci $f(x)$ jako součin funkcí $f_1(x)$, $f_2(x)$ a $f_3(x)$ a spočítejme si nejprve jednotlivé derivace těchto tří funkcí.

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \left(\frac{a}{b}\right)^x \\
f_2(x) &= \left(\frac{b}{x}\right)^a = b^a x^{-a} \\
f_3(x) &= \left(\frac{x}{a}\right)^b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x} &= \left(\frac{a}{b}\right)^x \ln\frac{a}{b} \\
\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x} &= -a\, b^a x^{-a-1} = \left(\frac{b}{x}\right)^a \frac{-a}{x} \\
\frac{\mathrm{d}f_3}{\mathrm{d}x} &= \frac{bx^{b-1}}{a} = \left(\frac{x}{a}\right)^b \frac{b}{x}
\end{aligned}$$

Pro derivaci součinu funkcí $f_1(x)$, $f_2(x)$ a $f_3(x)$ platí „řetízkové pravidlo“:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x} f_2(x) f_3(x) + f_1(x)\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x} f_3(x) + f_1(x) f_2(x)\frac{\mathrm{d}f_3}{\mathrm{d}x} \\
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &= \left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\ln\frac{a}{b} + \frac{b-a}{x}\right)
\end{aligned}$$

Příklad 4.2

Počítejme metodou „per partes“.

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} u(x) = \sin x & \to u'(x) = \cos x \\ v'(x) = \sin x & \to v(x) = -\cos x \end{vmatrix} \\
&= -\sin x\cos x + \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x \\
&= -\sin x\cos x + \int \left(1 - \sin^2 x\right)\,\mathrm{d}x \\
&= -\sin x\cos x + x - \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x \\
2\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x &= x - \sin x\cos x \\
\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x &= \frac{x - \sin x\cos x}{2}
\end{aligned}$$

Stejným způsobem pomocí metody „per partes“ vypočítáme i druhý integrál.

$$
\begin{aligned}
\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} u(x) = \cos x & \to u'(x) = -\sin x \\ v'(x) = \cos x & \to v(x) = \sin x \end{vmatrix} \\
&= \sin x \cos x + \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x \\
&= \sin x \cos x + \int \left(1 - \cos^2 x\right) \,\mathrm{d}x \\
&= \sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \,\mathrm{d}x \\
2 \int \cos^2 x \,\mathrm{d}x &= x + \sin x \cos x \\
\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x &= \frac{x + \sin x \cos x}{2}
\end{aligned}
$$

Příklad 4.3

Určitý integrál budeme počítat substituční metodou za využití výsledku předchozího příkladu.

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2} \,\mathrm{d}x &= 2 \int_{-2}^{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \,\mathrm{d}x \\
2 \int_{-2}^{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} x = 2 \sin y & x = -2 \Rightarrow y = -\frac{\pi}{2} \\ \mathrm{d}x = 2 \cos y \,\mathrm{d}y & x = 2 \Rightarrow y = -\frac{\pi}{2} \end{vmatrix} \\
&= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos y \sqrt{1 - \sin^2 y} \,\mathrm{d}y \\
&= 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 y \,\mathrm{d}y \\
&= 4 \left[\frac{y + \sin y \cos y}{2} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 4 \left(\frac{\pi}{4} + 0 + \frac{\pi}{4} + 0 \right) \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

Poznámka: stejný postup bychom použili i při substituci $x = 2 \cos y$.

Příklad 4.4

Zrychlení hmotného bodu získáme derivací jeho rychlosti v podle času t.

$$
\begin{aligned}
&\text{(a) } a = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v_0 - gt\right) = -g \\
&\text{(b) } a = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A\omega\cos\left(\omega t + \varphi\right)\right) = -A\omega^2 \sin\left(\omega t + \varphi\right)
\end{aligned}
$$

Rychlost hmotného bodu je rovna derivací jeho polohy podle času t. Poloha $y(t)$ je tudíž primitivní funkcí k rychlosti $v(t)$.

$$
\begin{aligned}
\text{(a) } y(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t &= int\left(v_0 - gt\right)\mathrm{d}t \\
&= -gt + y_0 \\
\text{(b) } y(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t &= int\left(A\omega\cos\left(\omega t + \varphi\right)\right)\mathrm{d}t \\
&= A\omega\frac{-1}{\omega}\sin\left(\omega t + \varphi\right) + y_0 \\
&= -A\omega\sin\left(\omega t + \varphi\right) + y_0
\end{aligned}
$$

Integrační konstantu jsme rovnou položili rovnu počáteční poloze y_0. Polohu $y(t)$ můžeme vypočítat i pomocí určitého integrálu, známe-li počáteční polohu v čase $t = 0$.

$$
\begin{aligned}
\text{(a) } y(t) = y_0 + \int_0^t v(t')\,\mathrm{d}t' &= y_0 + \int_0^t v_0 - gt'\,\mathrm{d}t' \\
&= y_0 + \left[v_0 t' - \frac{1}{2}gt'^2\right]_0^t \\
&= y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \\
\text{(b) } y(t) = y_0 + \int_0^t v(t')\,\mathrm{d}t' &= y_0 + \int_0^t A\omega\cos\left(\omega t + \varphi\right)\,\mathrm{d}t' \\
&= y_0 + \left[A\omega\frac{-1}{\omega}\sin\left(\omega t + \varphi\right)\right]_0^t \\
&= y_0 + A\omega\sin\left(\omega t + \varphi\right)
\end{aligned}
$$

Pro případ (b) harmonického oscilátoru vidíme, že pro nulovou počáteční polohu y_0, platí $a(t) = -\omega^2 y(t)$

Příklad 4.5

(a) V případě homogenního gravitačního pole závisí potenciální energie E_p pouze na souřadnici z, x-ová a y-ová složka síly jsou tedy nulové a z-ovou složku získáme derivací potenciální energie podle této souřadnice.

$$\begin{aligned}
F_x &= 0 \\
F_y &= 0 \\
F_z &= -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(mgz) = -mg
\end{aligned}$$

Výsledná síla má tedy velikost mg a působí proti směru osy z.

(b) V případě centrálního gravitačního pole závisí potenciální energie E_p na všech třech souřadnicích x, y, z. Proveďme nejprve pomocný výpočet a derivujme funkci $1/r$ podle proměnných x, y, z (parciální derivace).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} 2x \\
&= -\frac{x}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}} = -\frac{x}{r^3} \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} 2y \\
&= -\frac{y}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}} = -\frac{y}{r^3} \\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} 2z \\
&= -\frac{z}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}} = -\frac{z}{r^3}
\end{aligned}$$

Výslednou sílu F potom už můžeme snadno zapsat jako:

$$\begin{aligned}
F_x &= -\frac{\partial E_p}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\kappa m M}{r}\right) = -\frac{\kappa m M}{r^3}x \\
F_y &= -\frac{\partial E_p}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\kappa m M}{r}\right) = -\frac{\kappa m M}{r^3}y \\
F_z &= -\frac{\partial E_p}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\kappa m M}{r}\right) = -\frac{\kappa m M}{r^3}z
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\frac{\kappa m M}{r^3}(x, y, z) = -\frac{\kappa m M}{r^3}\vec{r}$$

Příklad 4.6

Nejprve si vypočítejme složky rychlosti ve směru x a y.

$$\begin{aligned}
v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{u}{\delta}\left(1 - e^{-\delta t}\right)\right] \\
&= -\frac{u}{\delta}e^{\delta t}(-\delta) \\
&= ue^{-\delta t} \\
v_y(t) = \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(\frac{w}{\delta} + \frac{g}{\delta^2}\right)\left(1 - e^{-\delta t}\right) - \frac{g}{\delta}t\right] \\
&= -\left(\frac{w}{\delta} + \frac{g}{\delta^2}\right)e^{\delta t}(-\delta) - \frac{g}{\delta} \\
&= we^{-\delta t} - \frac{g}{\delta}\left(1 - e^{-\delta t}\right)
\end{aligned}$$

Dále zderivujeme složky rychlosti v_x a v_y a vypočítáme zrychlení.

$$\begin{aligned}
a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(ue^{-\delta t}\right) \\
&= -\delta ue^{-\delta t} \\
&= -\delta v_x(t) \\
a_y(t) = \frac{\mathrm{d}v_y(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[we^{-\delta t} - \frac{g}{\delta}\left(1 - e^{-\delta t}\right)\right] \\
&= -\delta we^{-\delta t} - \frac{g}{\delta}e^{-\delta t}(-\delta) \\
&= -\delta we^{-\delta t} - ge^{-\delta t} \\
&= -\delta v_y(t) - g
\end{aligned}$$

Pomocí druhého Newtonova zákona můžeme rovnou psát složky F_x a F_y působící síly.

$$F_x = ma_x = -\delta m v_x$$
$$F_y = ma_y = -\delta m v_y - mg$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_v$$

$$\vec{F}_g = -m\vec{g} \qquad \text{tíhová síla}$$
$$\vec{F}_v = -\delta m\vec{v} \qquad \text{odpor prostředí}$$

Rovnice pohybu $x(t)$ a $y(t)$ ze zadání popisují trajektorii šikmého vrhu s odporem vzduchu.

Příklad 4.7

Počítejme příklad ve sférických souřadnicích r, θ, φ, pro které jsou ortogonální obloučky dány jako:

$$\mathrm{d}s_r = 1 \cdot \mathrm{d}r$$
$$\mathrm{d}s_\theta = r \cdot \mathrm{d}\theta$$
$$\mathrm{d}s_\varphi = r \sin\theta \mathrm{d}\varphi$$

Objemový element ve sférických souřadnicích je potom $\mathrm{d}V = \mathrm{d}s_r \mathrm{d}s_\theta \mathrm{d}s_\varphi = r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$. Objem koule vypočítáme jako objemový integrál z „jedničky“ v mezích $r \in [0, R]$, $\theta \in [0, \pi]$ („zeměpisná šířka“) a $\varphi \in [0, 2\pi]$ („zeměpisná délka“).

$$V = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}V = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$
$$V = \int_0^R r^2\,\mathrm{d}r \cdot \int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \cdot \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\varphi = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \cdot [-\cos\theta]_0^\pi \cdot [\varphi]_0^{2\pi}$$
$$V = \frac{R^3}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Pro plošný element můžeme použít vzorec ve tvaru $\mathrm{d}S = \mathrm{d}s_\theta \mathrm{d}s_\varphi = r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$, neboť souřadnice r se nemění. Podobně jako objem koule vypočítáme její povrch jako plošný integrál z „jedničky“ v mezích $\theta \in [0, \pi]$ a $\varphi \in [0, 2\pi]$.

$$S = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}S = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$
$$S = R^2 \cdot \int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \cdot \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\varphi = R^2 \cdot [-\cos\theta]_0^\pi \cdot [\varphi]_0^{2\pi}$$
$$S = R^2 \cdot 2 \cdot 2\pi = 4\pi R^2$$