Cvičení 4 - derivace a integrál ve fyzice

1. Vypočítejte derivaci funkce $f(x) = \left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{x}{a}\right)^b$ podle proměnné x pro $a, b, x > 0$.

[*řešení:* $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{x}{a}\right)^b \left(\ln\frac{a}{b} - \frac{a-b}{x}\right)$.]

2. Spočítejte neurčité integrály: $\int \sin^2 x\ \mathrm{d}x$ a $\int \cos^2 x\ \mathrm{d}x$.

[*řešení:*
$\int \sin^2 x\ \mathrm{d}x = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + C$, $\int \cos^2 x\ \mathrm{d}x = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + C$, kde $C \in \mathbf{R}$.]

3. Spočítejte určitý integrál: $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\ \mathrm{d}x$.

[*řešení:* $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\ \mathrm{d}x = 2\pi$.]

4. Vypočítejte polohu a zrychlení hmotného bodu v čase t, je-li jeho rychlost:
(a) $v(t) = v_0 - gt$ (svislý vrh),
(b) $v(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$ (harmonické kmity).

[*řešení:*
(a) $y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, $a(t) = -g$
(b) $y(t) = y_0 + A \sin(\omega t + \varphi)$, $a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$. Platí-li $y_0 = 0$, potom $a(t) = -\omega^2 y(t)$]

5. Pro potenciální energii E_p síly $\mathbf{F}$ platí vztah: $\vec{F} = -\nabla E_p$ neboli $F_i = -\frac{\partial E_p}{\partial x_i}$. Vypočítejte sílu, působící na hmotný bod, je-li jeho potenciální energie:
(a) $E_p = mgz$ (homogenní gravitační pole),
(b) $E_p = -\frac{\kappa m M}{r}$, kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (centrální gravitační pole).

[*řešení:* (a) $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$, (b) $\vec{F} = -\frac{\kappa m M}{r^3}\vec{r}$]

6. Hmotný bod o hmotnosti m se pod vlivem působící síly $\vec{F}$ pohybuje po trajektorii $x(t) = \frac{u}{\delta}\left(1 - e^{-\delta t}\right)$; $y(t) = \left(\frac{w}{\delta} + \frac{g}{\delta^2}\right)\left(1 - e^{-\delta t}\right) - \frac{g}{\delta} t$, kde u, w a δ jsou konstanty, g je tíhové zrychlení. Určete působící sílu $\vec{F}$.

[*řešení:* $F_x = -m\delta v_x$; $F_y = -mg - m\delta v_y$, trajektorie odpovídá šikmému vrhu s odporem vzduchu.]

7. Odvoďte vzorec pro výpočet objemu a povrchu koule o poloměru R pomocí určitých integrálů.

[*řešení:* Objem koule $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, povrch koule $S = 4\pi R^2$.]

Základní vztahy

Derivace a primitivní funkce základních funkcí:

funkce $f(x)$	derivace $f'(x)$	primitivní funkce $F(x)$	podmínka
C	0	$C\ x$	$C \in \mathbf{R}$
x^n	$n\ x^{n-1}$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$	$n \neq 0$
e^x	e^x	e^x	
a^x	$a^x \ln a$	$\frac{1}{\ln a} a^x$	$a > 0$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x\,(\ln x - 1)$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	

Operace s derivacemi:

násobení konstantou	$[a\ f(x)]' = a\ f'(x)$, kde $a \in \mathbf{R}$
součet/rozdíl	$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
součin	$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
podíl	$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
složená funkce	$[f(g(x))]' = f'(x)g'(x)$

Integrály:

neurčitý integrál	$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$, kde $C \in \mathbf{R}$
(primitivní funkce)	$F'(x) = f(x)$
metoda „per partes“	$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$
substituční metoda	$\int f\,(g(x))\,g'(x)\mathrm{d}x = \int f(y)\mathrm{d}y$, kde $y = g(x)$
určitý integrál	$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Kinematika

polohový vektor	$\vec{r} = (x, y, z)$	$r = \lvert\vec{r}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
rychlost	$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$	
zrychlení	$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$	