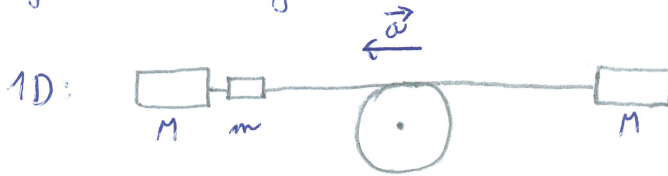


- urychlený pohyb celé soustavy o hmotnosti $2M+m$, urychlení a



2. Newtonův zákon: $(2M+m)a = Mg + mg - Mg$ + nic víc
 - hmotnost kladky,
 tření vláknem apod.

$$\Rightarrow a = g \frac{m}{2M+m}$$

↑ neznámá

- rovnoměrně urychlený pohyb na dráze h

$$h = \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = a t \Rightarrow t = \frac{v}{a}$$

$$\Rightarrow h = \frac{v^2}{2a}$$

$$a = \frac{v^2}{2h}$$

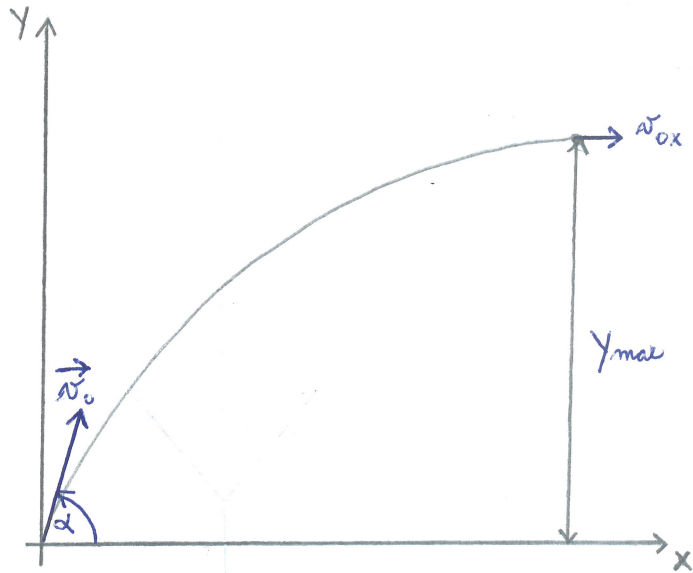
- výpočet g

$$g = \frac{2M+m}{m} a = \frac{2M+m}{m} \frac{v^2}{2h}$$

$$y_{\max} = 9,6 \text{ m}$$

$$\alpha = 70^\circ$$

$$g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$$



pohybové rovnice:

$$m \ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = v_{0x} t + x_0$$

$$m \ddot{y} = -mg \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} = -g \quad \Rightarrow \quad y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t + y_0$$

počáteční podmínky:

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$v_{x0} = v_0 \cos \alpha$$

$$v_{y0} = v_0 \sin \alpha$$

maximální výška:

$$y = y_{\max} \Leftrightarrow v_y(\tilde{t}) = 0$$

$$v_y(\tilde{t}) = \dot{y}(\tilde{t}) = -g \tilde{t} + v_0 \sin \alpha$$

$$0 = v_y(\tilde{t}) = -g \tilde{t} + v_0 \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \tilde{t} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

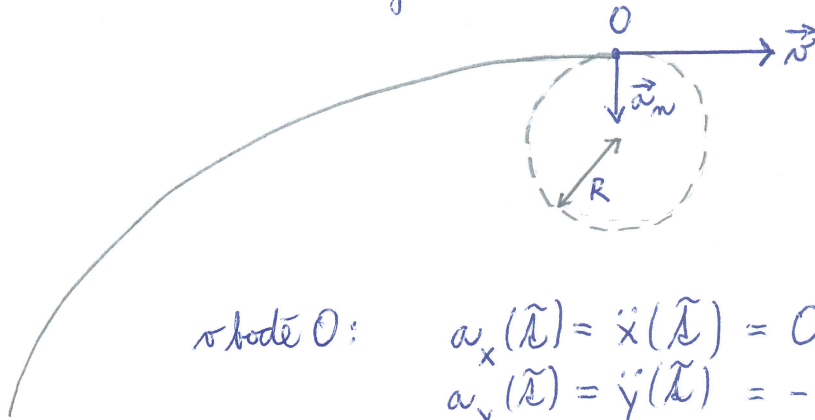
$$y_{\max} = y(\tilde{t}) = -\frac{1}{2} g \tilde{t}^2 + v_0 \sin \alpha \tilde{t} = -\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}$$

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{\sqrt{2g y_{\max}}}{\sin \alpha} = 14,6 \text{ m s}^{-1}$$

poloměr křivosti:
(poloměr oskulární kružnice)

$$a_n = \frac{v^2}{R} \rightarrow \begin{array}{l} \text{velikost rychlosti} \\ \text{poloměr křivosti} \end{array}$$

normálové zrychlení



→ přednáška 3 / str. 15/23

v bodě O:

$$\begin{aligned} a_x(\tilde{t}) &= \ddot{x}(\tilde{t}) = 0 \\ a_y(\tilde{t}) &= \ddot{y}(\tilde{t}) = -g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_x(\tilde{t}) &= \dot{x}(\tilde{t}) = v_0 \cos \alpha \\ v_y(\tilde{t}) &= \dot{y}(\tilde{t}) = -g \tilde{t} + v_0 \sin \alpha = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_n = g$$

$$v = v_0 \cos \alpha$$

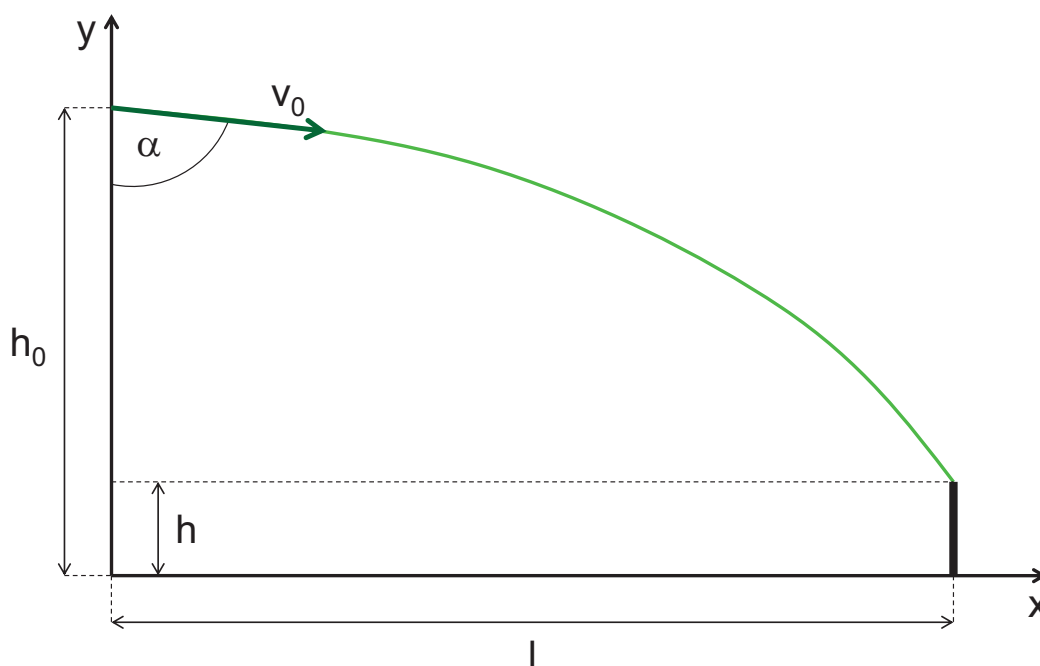
dobromady:

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = \frac{2y_{\max}}{g \sin^2 \alpha} = 2,5 \text{ m}$$

$$v_0^2 = \frac{2y_{\max}}{\sin^2 \alpha}$$

Příklad 3.3

Zadání: Při tenisovém podání je míček odpálen ze vzdálenosti 12 m od sítě z výšky 2.9 m šikmo dolů pod úhlem 82° vůči vertikále. Jaká musí být počáteční rychlost v_0 míčku, aby přeletěl těsně přes síť výšky 0.9 m?



Řešení: Obecný šikmý vrh je popsán rovnicemi:

$$\begin{aligned}x(t) &= v_{0x}t + x_0, \\y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0.\end{aligned}$$

Počáteční polohy x_0 a y_0 a počáteční rychlosti v_{x0} a v_{y0} určíme ze zadání.

$$\begin{aligned}x_0 &= 0 \\y_0 &= h_0 \\v_{x0} &= v_0 \sin \alpha \\v_{y0} &= -v_0 \cos \alpha\end{aligned}$$

Dohromady je tedy pohyb míčku v rovině xy popsán těmito rovnicemi:

$$\begin{aligned}x(t) &= v_0 \sin \alpha t, \\y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 - v_0 \cos \alpha t + h_0.\end{aligned}$$

Podmínku, že míček přeletí těsně nad sítí, můžeme zformulovat tak, že v momentě, kdy $x = l$ platí zároveň $y = h$.

$$\begin{aligned}x(t) &= v_0 t \sin \alpha = l \\y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 - v_0 t \cos \alpha + h_0 = h\end{aligned}$$

Z první rovnice si můžeme vyjádřit dobu t , po kterou míček letí k síti:

$$t = \frac{l}{v_0 \sin \alpha}$$

a dosadit ji do druhé rovnice:

$$\begin{aligned}h_0 - h &= \frac{1}{2}g \left(\frac{l}{v_0 \sin \alpha} \right)^2 + v_0 \cos \alpha \frac{l}{v_0 \sin \alpha} \\h_0 - h - l \cot \alpha &= \frac{gl^2}{2v_0^2 \sin^2 \alpha} \\v_0 &= \sqrt{\frac{gl^2}{2 \sin^2 \alpha (h_0 - h - l \cot \alpha)}}.\end{aligned}$$

Číselně vychází počáteční rychlost míčku 47.9 m s^{-1} neboli 172.6 km h^{-1} .

$$x(t) = \frac{w}{\delta} (1 - e^{-\delta t})$$

$$\Rightarrow v_x(t) = \dot{x}(t) = -\frac{w}{\delta} (-\delta) e^{-\delta t} = \underline{w e^{-\delta t}}$$

$$a_x(t) = \ddot{x}(t) = \dot{v}_x(t) = -\delta w e^{-\delta t} = -\delta v_x$$

$$\Rightarrow F_x = m a_x = -m \delta v_x$$

$$y(t) = \left(\frac{w}{\delta} + \frac{g}{\delta^2} \right) (1 - e^{-\delta t}) - \frac{g}{\delta} t$$

$$\Rightarrow v_y(t) = \dot{y}(t) = -\left(\frac{w}{\delta} + \frac{g}{\delta^2} \right) (-\delta) e^{-\delta t} - \frac{g}{\delta} = \underline{\left(w + \frac{g}{\delta} \right) e^{-\delta t}} - \frac{g}{\delta}$$

$$a_y(t) = \ddot{y}(t) = \dot{v}_y(t) = -\delta \left(w + \frac{g}{\delta} \right) e^{-\delta t} = -\delta v_y - g$$

$$\Rightarrow F_y = m a_y = -m \delta v_y - mg$$

$= \underbrace{-\delta \left(w + \frac{g}{\delta} \right) e^{-\delta t}}_{-\delta v_y} - g$

dohromady: $\vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_H$

$$\vec{F}_G = m \vec{g} = (0, -mg) \quad \dots \text{ tíhová síla}$$

$$\vec{F}_H = -m \delta \vec{v} = (-m \delta v_x, -m \delta v_y) \quad \dots \text{ síla odporu vzduchu}$$

Trajektorie $x(t), y(t)$ popisuje šikmý vch v tíhovém poli se započtením odporu vzduchu.

a) bez odporu vzduchu
(vzhledem k pravoúhelníkové
stojánce mimo chodníku)

maximální výška:

$$x = v_0 t \cos \alpha - \omega t$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y = y_{\max} \Leftrightarrow v_y(\tilde{t}) = 0$$

$$v_y(\tilde{t}) = \dot{y}(\tilde{t}) = v_0 \sin \alpha - g \tilde{t}$$

$$\Rightarrow \tilde{t} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$y_{\max} = y(\tilde{t}) = v_0 \tilde{t} \sin \alpha - \frac{1}{2} g \tilde{t}^2$$

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 0,6 \text{ m}$$

$$v_0 = 10 \text{ m s}^{-1}$$

$$\alpha = 20^\circ$$

$$g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$$

maximální délka:

$$x = x_{\max} \Leftrightarrow y(T) = 0$$

$$y(T) = v_0 T \sin \alpha - \frac{1}{2} g T^2$$

$$\Rightarrow T_1 = 0 \quad \dots \text{míč před vyhozením (x=0)}$$

$$T_2 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \quad \dots \text{míč po dopadu (x_{\max})}$$

$$x_{\max} = x(T) = v_0 T \cos \alpha - \omega T$$

$$x_{\max} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} - \frac{2\omega v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha - \frac{2v_0 \omega}{g} \sin \alpha = 3,1 \text{ m}$$

pro numerické řešení:

počáteční podmínky:

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$v_{x0} = v_0 \cos \alpha - w$$

$$v_{y0} = v_0 \sin \alpha$$

rychlosti:

$$v_x(t+dt) = v_x(t)$$

$$v_y(t+dt) = v_y(t) - g \cdot dt$$

$$\rightarrow \frac{v_y(t+dt) - v_y(t)}{dt} = -g$$

$$\dot{v}_y = -g$$

polohy:

$$x(t+dt) = x(t) + v_x(t) \cdot dt$$

$$y(t+dt) = y(t) + v_y(t) \cdot dt$$

$$\rightarrow \frac{y(t+dt) - y(t)}{dt} = v_y$$

$$\dot{y} = v_y$$

b) s odporem vzduchu
 \rightarrow pro numerické řešení

počáteční podmínky:

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$v_{x0} = v_0 \cos \alpha$$

$$v_{y0} = v_0 \sin \alpha$$

pohybové rovnice: $m \ddot{x} = -h(v_x + w)$

$$m \ddot{y} = -mg - h v_y$$

rychlost větru

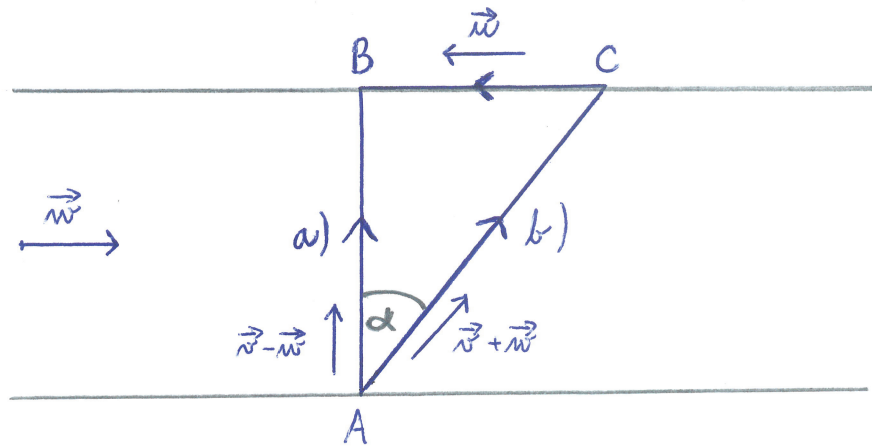
\Rightarrow rychlosti: $v_x(t+dt) = v_x(t) - \frac{h}{m} (v_x(t) + w) \cdot dt$

$$v_y(t+dt) = v_y(t) - g \cdot dt - \frac{h}{m} v_y(t) \cdot dt$$

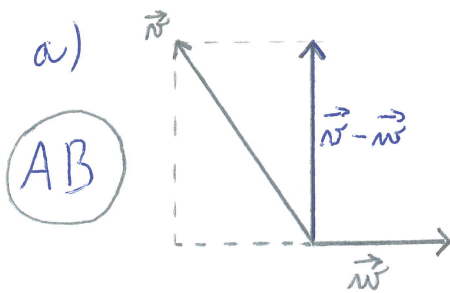
polohy:

$$x(t+dt) = x(t) + v_x(t) \cdot dt$$

$$y(t+dt) = y(t) + v_y(t) \cdot dt$$

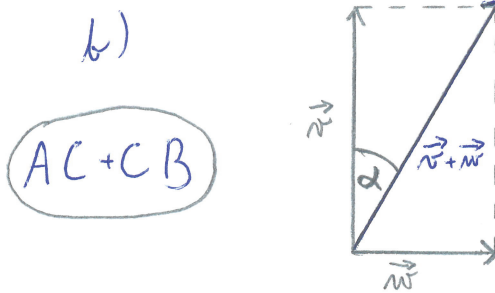


$v = 2,5 \text{ km/h}$
 $u = 4 \text{ km/h}$
 $w = 2 \text{ km/h}$



$|v-w| = \sqrt{v^2 - w^2}$

$k_{AB} = \frac{|AB|}{\sqrt{v^2 - w^2}}$



$|v+w| = \sqrt{v^2 + w^2}$

$k_{AC} = \frac{|AC|}{\sqrt{v^2 + w^2}} = \frac{|AB|}{v}$

$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{\sqrt{v^2 + w^2}}{v}$

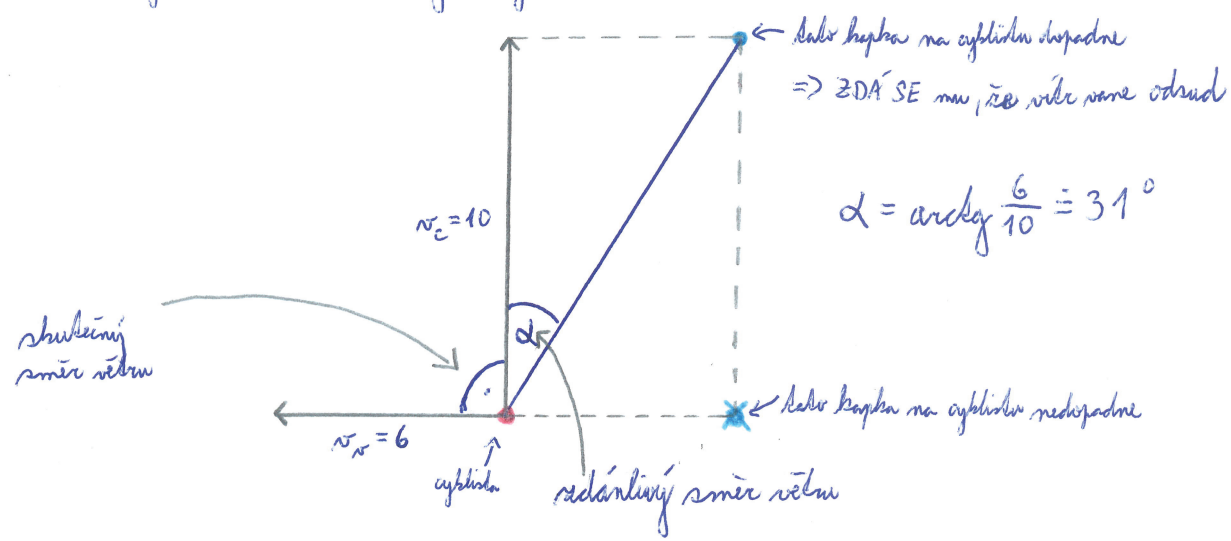
$k_{CB} = \frac{|BC|}{w} = |AB| \frac{w}{vw}$

$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{w}{v}$

dohromady: $\frac{T_a}{T_b} = \frac{k_{AB}}{k_{AC} + k_{CB}} = \frac{\frac{|AB|}{\sqrt{v^2 - w^2}}}{\frac{|AB|}{v} + |AB| \frac{w}{vw}} = \frac{v}{\sqrt{v^2 - w^2} (1 + \frac{w}{v})} = 1,11$

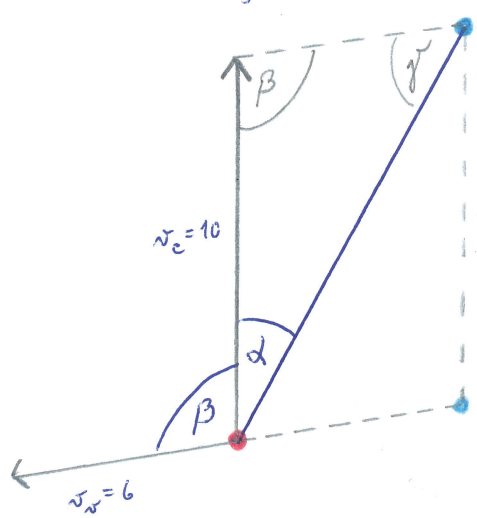
\Rightarrow spísov b) je rychlejší

v) skutečný směr větru kolmý k cyklistovi (+ příč!)



$$\alpha = \arcsin \frac{6}{10} = 31^\circ$$

a) zdánlivý směr $\alpha = 15^\circ$, skutečný směr $\beta = ?$

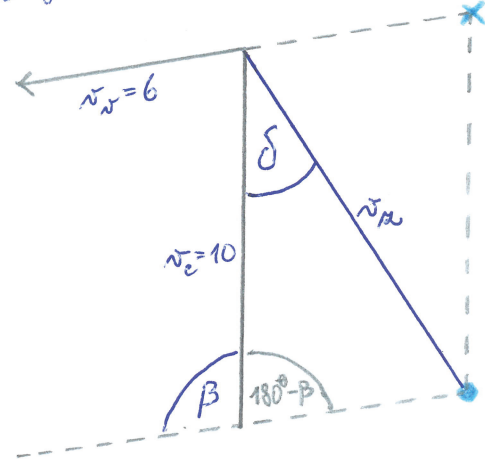


sinová věta: $\frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{v_e}{v_w}$

$$\sin \gamma = \sin \alpha \frac{v_e}{v_w} \Rightarrow \gamma = 25,6^\circ$$

skutečný směr: $\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma = 139,4^\circ$

b) opačný směr jízdy cyklisty, skutečný směr β , zdánlivý směr $\delta = ?$



sinová věta: $\frac{\sin \delta}{\sin (180^\circ - \beta)} = \frac{v_w}{v_R}$
 $= \sin \beta$

kosinová věta: $v_R^2 = v_e^2 + v_w^2 - 2v_e v_w \cos (180^\circ - \beta)$
 $= -\cos \beta$

$$v_R = \sqrt{v_e^2 + v_w^2 + 2v_e v_w \cos \beta}$$

$$v_R = 6,695 \text{ m s}^{-1}$$

zdánlivý směr: $\sin \delta = \sin \beta \frac{v_w}{v_R}$
 $\delta = 35,6^\circ$