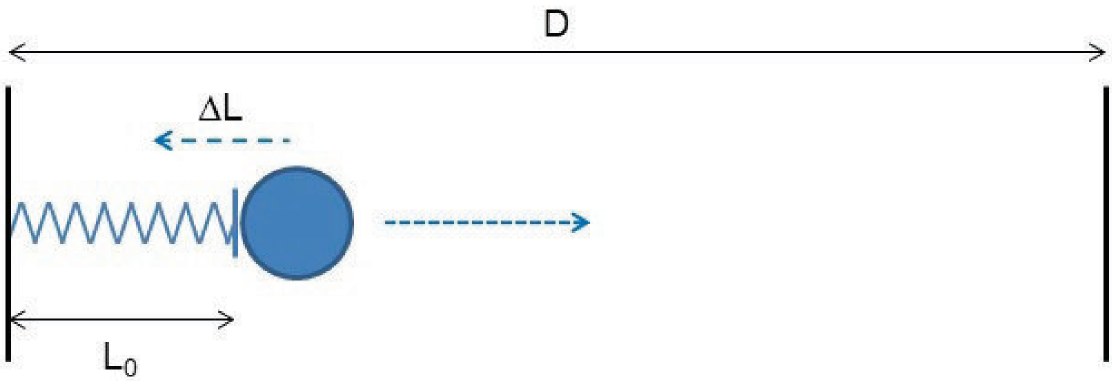
Zadání: Mějme kuličku o hmotnosti $m = 500$ g a pružinu o zanedbatelné hmotnosti, délce $L_0 = 8$ cm a tuhosti $k = 200$ N m^{-1}. Kuličkou stlačíme pružinu o $\Delta L = 4$ cm a pustíme.
(a) V jaké poloze se kulička oddělí od pružiny?
Vypuštěná kulička narazí do protější stěny, kde ztratí polovinu své kinetické energie a vrátí se zpět k pružině, která je v nenapjatém stavu.
(b) O jakou délku ji stlačí tentokrát?



Řešení: V poloze, kdy je délka pružiny rovna L, tj. prodloužení pružiny je nulové, působí na kuličku nulová síla, kulička se stává volnou a opustí pružinu. Rychlost kuličky v okamžiku opuštění pružiny je maximální a lze ji vypočítat pomocí energií.

$$v_{max} = \Delta L\omega = \Delta L\sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad (1)$$

Ve stlačeném stavu je potenciální energie pružnosti maximální a kinetická energie kuličky pružiny nulová. Zatímco v okamžiku odpoutání kuličky od pružiny je potenciální energie pružnosti nulová a kinetická energie kuličky je maximální. Kinetickou energii samotné pružiny můžeme zanedbat.

$$E_{p0} = \frac{1}{2}k(\Delta L)^2$$
$$E_{k0} = 0$$
$$E_{p1} = 0$$
$$E_{k1} = \frac{1}{2}mv_{max}^2$$

Z rovnosti energií $E_{p0} = E_{k1}$ získáme po drobných úpravách velikost rychlosti v_{max}.

$$E_{p0} = E_{k1}$$
$$\frac{1}{2}k(\Delta L)^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2$$
$$v_{max} = \Delta L\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Po odpoutání od pružiny se kulička pohybuje rovnoměrným pohybem. Při nárazu do stěny kulička ztratí polovinu své kinetické energie a její rychlost klesne na hodnotu v_2. V momentu opětovného nárazu kuličky do nenapjaté pružiny je stále kinetická energie kuličky rovna E_{k2} a potenciální energie pružnosti je nulová. Naopak v okamžiku maximálního opětovného-stlačení pružiny o maximální výchylku x_{max} je kinetická energie kuličky nulová a potenciální energie pružnosti je maximální.

$$\begin{aligned}
E_{k2} &= \frac{1}{2}E_{k1} = \frac{1}{4}mv_{max}^2 = \frac{1}{4}k(\Delta L)^2 \\
E_{p2} &= 0 \\
E_{k3} &= 0 \\
E_{p3} &= \frac{1}{2}kx_{max}^2
\end{aligned}$$

Z rovnosti obou energií $E_{k2} = E_{p3}$ opět můžeme dopočítat maximální výchylku x_{max}.

$$\begin{aligned}
E_{k2} &= E_{p3} \\
\frac{1}{4}k(\Delta L)^2 &= \frac{1}{2}kx_{max}^2 \\
x_{max} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta L \\
x_{max} &= 2.8 \text{ cm}
\end{aligned}$$

$$x_1 = A e^{i(\omega t+\varphi_1)} = A e^{i\omega t} e^{i\varphi_1}$$

$$x_2 = B e^{i(\omega t+\varphi_2)} = B e^{i\omega t} e^{i\varphi_2}$$

$$\longrightarrow \quad x_1 + x_2 = e^{i\omega t}\underbrace{\left(A e^{i\varphi_1} + B e^{i\varphi_2}\right)}_{\hat{C}\ \text{(komplexní číslo)}}$$

$$\hat{C} = A e^{i\varphi_1} + B e^{i\varphi_2} = A(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) + B(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$\hat{C} = \underbrace{(A\cos\varphi_1 + B\cos\varphi_2)}_{\substack{\text{reálná část } \hat{C} \\ Re(\hat{C})}} + i\underbrace{(A\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2)}_{\substack{\text{imaginární část } \hat{C} \\ Im(\hat{C})}}$$

- $\hat{C}$ lze zapsat ve tvaru: $\hat{C} = C e^{i\alpha}$

C – amplituda (reálná)

α – fáze (reálná)

$$\hat{C} = C e^{i\alpha} = C(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \underbrace{C\cos\alpha}_{Re(\hat{C})} + i\underbrace{C\sin\alpha}_{Im(\hat{C})}$$

OBECNĚ

výpočet amplitudy

- $$|\hat{C}| = \sqrt{(Re(\hat{C}))^2 + (Im(\hat{C}))^2} = \sqrt{C^2\cos^2\alpha + C^2\sin^2\alpha} = C$$

výpočet fáze

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{Im(\hat{C})}{Re(\hat{C})} = \frac{C\sin\alpha}{C\cos\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha$$

$\Rightarrow$ amplituda $C = \sqrt{(A\cos\varphi_1 + B\cos\varphi_2)^2 + (A\sin\varphi_1 + B\sin\varphi_2)^2}$

$$= \sqrt{(A^2\cos^2\varphi_1 + 2AB\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + B^2\cos^2\varphi_2) + (A^2\sin^2\varphi_1 + 2AB\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + B^2\sin^2\varphi_2)}$$

$$= \sqrt{A^2 + 2AB\underbrace{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)}_{=\cos(\varphi_1-\varphi_2)} + B^2}$$

$= \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ ... součtový vzorec

$$C = \sqrt{A^2 + 2AB\cos(\varphi_1-\varphi_2) + B^2}$$

$\Rightarrow$ fáze $\quad \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{A\sin\varphi_1 + B\sin\varphi_2}{A\cos\varphi_1 + B\cos\varphi_2}$

výsledek: $\quad A e^{i(\omega t+\varphi_1)} + B e^{i(\omega t+\varphi_2)} = C e^{i(\omega t+\alpha)}$

neboli:

Re. části $\rightarrow$ $\quad A\cos(\omega t+\varphi_1) + B\cos(\omega t+\varphi_2) = C\cos(\omega t+\alpha)$

Im. části $\rightarrow$ $\quad +i\left(A\sin(\omega t+\varphi_1) + B\sin(\omega t+\varphi_2)\right) = +iC\sin(\omega t+\alpha)$

• nucené kmity : $x(t) = A_0 \sin(\Omega t + \vartheta)$

• činitel jakosti : $Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = 1 \quad \Rightarrow \omega_0 = 2\delta$

• amplituda : $A_0(\Omega) = \frac{F_0}{m}\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right]^{-1/2}$

$\downarrow$

maximální amplituda : $\frac{dA_0}{d\Omega} = 0$

$$= \frac{-F_0}{2m}\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right]^{-\frac{3}{2}} \cdot \underbrace{\left(2(\omega_0^2 - \Omega^2)(-2\Omega) + 8\delta^2\Omega\right)}_{=0}$$

$$0 = -4\omega_0^2\Omega + 4\Omega^3 + 8\delta^2\Omega$$

$$0 = \Omega^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2 \underset{\omega_0 = 2\delta}{=} \Omega^2 - 4\delta^2 + 2\delta^2$$

rezonance $\Rightarrow \Omega_{rez} = \sqrt{2}\,\delta = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_0$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_{rez}} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\omega_0}$$

• výkon : $P_F(\Omega) = \frac{F_0^2\Omega^2\delta}{m\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right]}$

$\downarrow$

maximální výkon : $\frac{dP_F}{d\Omega} = 0$

$$0 = \frac{F_0^2\delta}{m}\,\frac{2\Omega\left((\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2\right)-\Omega^2\left(2(\omega_0^2-\Omega^2)(-2\Omega)+8\delta^2\Omega\right)}{\left[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2\right]^2}$$

$$0 = 2\Omega\left((\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2\right)-\Omega^2\left(2(\omega_0^2-\Omega^2)(-2\Omega)+8\delta^2\Omega\right)$$

$$0 = 2\Omega\left(\omega_0^4-2\omega_0^2\Omega^2+\Omega^4+4\delta^2\Omega^2\right)-\Omega^2\left(-4\omega_0^2\Omega+4\Omega^3+8\delta^2\Omega\right)$$

$$0 = 2\omega_0^4\Omega-\cancel{4\omega_0^2\Omega^3}+2\Omega^5+\cancel{8\delta^2\Omega^3}+\cancel{4\omega_0^2\Omega^3}-4\Omega^5-\cancel{8\delta^2\Omega^3}$$

$$0 = 2\omega_0^4\Omega-2\Omega^5 \qquad = 2\Omega(\omega_0^4-\Omega^4)$$

rezonance $\Rightarrow \Omega_{rez} = \omega_0$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_{rez}} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

- rezonanční křivka : $P_F = \frac{F_0^2\delta}{m} \frac{\Omega^2}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2}$

- rezonance $\Omega \doteq \Omega_{rez} = \omega_0$

$$(\omega_0^2-\Omega^2)^2 = (\omega_0-\Omega)^2\underbrace{(\omega_0+\Omega)^2}_{\doteq 2\omega_0} \doteq 4\,\omega_0^2(\omega_0-\Omega)^2$$

$$P_F = \frac{F_0^2\delta}{m} \frac{\omega_0^2}{4\omega_0^2(\omega_0-\Omega)^2+4\delta^2\omega_0^2} = \underbrace{\overset{A}{\frac{F_0^2\delta}{4m}} \frac{1}{(\omega_0-\Omega)^2+\delta^2}}_{\text{Lorentzián}}$$

- pološířka Lorentziánu : (FWHM)

Full Width at Half Maximum

maximum ... $\Omega = \omega_0$ ... $P_F = \frac{A}{\delta^2}$ $\xrightarrow{\frac{1}{2}\text{max}}$

$\frac{1}{2}$ maxima ... $\Omega = \bar{\Omega}$ ... $P_F = A\frac{1}{(\omega_0-\bar{\Omega})^2+\delta^2} = \frac{A}{2\delta^2}$

$$\Rightarrow (\bar{\Omega}-\omega_0)^2+\delta^2 = 2\delta^2$$
$$(\bar{\Omega}-\omega_0)^2 = \delta^2$$

$$\Rightarrow \bar{\Omega}_{1/2} = \omega_0 \pm \delta$$

$$w = \bar{\Omega}_2 - \bar{\Omega}_1 = (\omega_0+\delta)-(\omega_0-\delta) = 2\delta$$

- pološířka rezonanční křivky: maximum ... $\Omega = \omega_0$ ... $P_F = \frac{A}{\delta^2}$ $\xrightarrow{\frac{1}{2}\text{max}}$

$\frac{1}{2}$ maxima ... $\Omega = \bar{\Omega}$ ... $P_F = 4A\frac{\bar{\Omega}^2}{(\omega_0^2-\bar{\Omega}^2)^2+4\delta^2\bar{\Omega}^2} = \frac{A}{2\delta^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{4\bar{\Omega}^2}{(\omega_0^2-\bar{\Omega}^2)^2+4\delta^2\bar{\Omega}^2} = \frac{1}{2\delta^2}$$

$$8\delta^2\bar{\Omega}^2 = \bar{\Omega}^4 - 2\bar{\Omega}^2\omega_0^2 + \omega_0^4 + 4\delta^2\bar{\Omega}^2$$

$$0 = \bar{\Omega}^4 + \bar{\Omega}^2(-2\omega_0^2 - 4\delta^2) + \omega_0^4$$

↑

kvadratická rovnice pro $\bar{\Omega}^2$

$$\bar{\Omega}^2 = \frac{1}{2}\left(2\omega_0^2 + 4\delta^2 \pm \sqrt{4\omega_0^4 + 16\delta^2\omega_0^2 + 16\delta^4 - 4\omega_0^4}\right)$$

$$\bar{\Omega}^2 = \omega_0^2 + 2\delta^2 \pm \sqrt{4\delta^2\omega_0^2 + 4\delta^4}$$

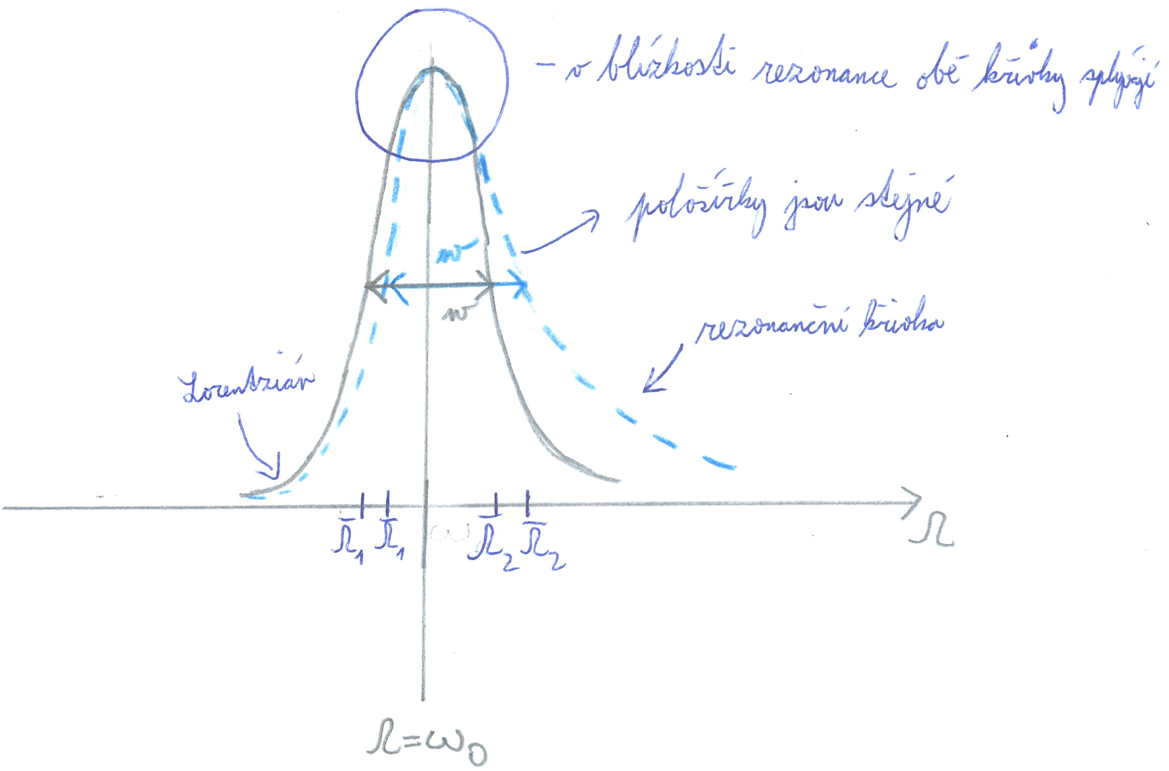
$$\bar{\Omega}^2 = \omega_0^2 + 2\delta^2 \pm 2\delta\sqrt{\omega_0^2+\delta^2}$$

$$\bar{\Omega}^2 = (\omega_0^2+\delta^2) \pm 2\delta\sqrt{\omega_0^2+\delta^2} + \delta^2 = \left(\sqrt{\omega_0^2+\delta^2} \pm \delta\right)^2$$

$$\Rightarrow \Omega_{1/2} = \pm\delta \pm \sqrt{\omega_0^2+\delta^2}$$

$$w = \Omega_2 - \Omega_1 = \left(\sqrt{\omega_0^2+\delta^2}+\delta\right) - \left(\sqrt{\omega_0^2+\delta^2}-\delta\right) = 2\delta$$

• graficky



Příklad 11.5. P11.5-1

a) hvězda se přibližuje $f = f_0 \frac{c}{c - v_S} \Rightarrow v_S = \left(1 - \frac{f_0}{f}\right) c = \left(\frac{f - f_0}{f}\right) c =$

$$= \left(\frac{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}}{\frac{1}{\lambda}}\right) c = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} c$$

hvězda se přibližuje – nastává modrý posuv (posuv k menším vlnovým délkám) – dosazujeme λ_1

$$\underline{\underline{v_S}} = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_0} c = \underline{\underline{0{,}38\,c}}$$

b) hvězda se oddaluje $f = f_0 \frac{c}{c + v_S} \Rightarrow v_S = \left(\frac{f_0}{f} - 1\right) c = \left(\frac{f_0 - f}{f}\right) c =$

$$= \left(\frac{\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}}\right) c = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} c$$

hvězda se oddaluje – nastává červený posuv (posuv k větším vlnovým délkám) – dosazujeme λ_2

$$\underline{\underline{v_S}} = \frac{\lambda_2 - \lambda_0}{\lambda_0} c = \underline{\underline{0{,}25\,c}}$$

Příklad 11.6. P11.6-1

a) Když se vlak přibližoval, zněl výš. Když se vzdaloval, tak níž.

b) přibližování: $f = f_0 \frac{v}{v - v_S} \Rightarrow v_S = \left(1 - \frac{f_0}{f}\right) v = \left(1 - \frac{1}{\sqrt[12]{2}}\right) v$

$$\underline{\underline{v_S = 69{,}3\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}}}$$

vzdalování: $f = f_0 \frac{v}{v + v_S} \Rightarrow v_S = \left(\frac{f_0}{f} - 1\right) v = \left(\sqrt[12]{2} - 1\right) v$

$$\underline{\underline{v_S = 73{,}4\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}}}$$

c) přibližování: $f_{z,p} = |f - f_0| = \left| f_0 \left(1 - \frac{v}{v - v_S}\right) \right|$

$$\underline{\underline{f_{z,p} = 7{,}2\ \mathrm{Hz}}}$$

vzdalování: $f_{z,v} = |f - f_0| = \left| f_0 \left(1 - \frac{v}{v + v_S}\right) \right|$

$$\underline{\underline{f_{z,v} = 7{,}0\ \mathrm{Hz}}}$$