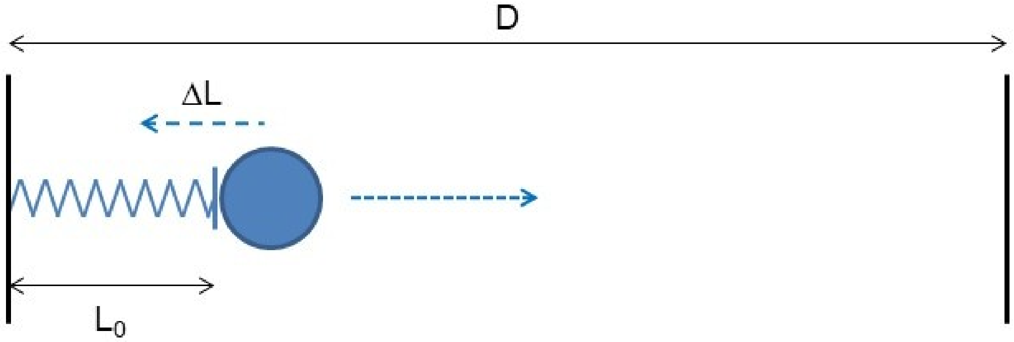
Cvičení 11 - skládání kmitů, nucené kmity

1. Mějme kuličku o hmotnosti $m = 500$ g a pružinu o zanedbatelné hmotnosti, délce $L_0 = 8$ cm a tuhosti $k = 200$ N m^{-1}. Kuličkou stlačíme pružinu o $\Delta L = 4$ cm a pustíme.
(a) V jaké poloze se kulička oddělí od pružiny?
Vypuštěná kulička narazí do protější stěny, kde ztratí polovinu své kinetické energie a vrátí se zpět k pružině, která je v nenapjatém stavu.
(b) O jakou délku ji stlačí tentokrát?



[*řešení:* Kulička se oddělí od pružiny, ve chvíli, kdy je její délka opět L, tj. je v nenapjatém stavu. Po nárazu se pružina stlačí o maximální výchylku $x_{max} = \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta L \doteq 2.8$ cm.]

2. S využitím komplexní reprezentace složte následující kmity:
$x_1(t) = Ae^{i(\omega t+\varphi_1)}$ a $x_2(t) = Be^{i(\omega t+\varphi_2)}$.

[*řešení:* $x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \hat{C}e^{i\omega t}, \hat{C} = Ce^{i\alpha}$ (komplexní amplituda);
kde $C = \sqrt{A^2 + 2AB\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + B^2}$ a $\mathrm{tg}\alpha = \frac{A\sin\varphi_1+B\sin\varphi_2}{A\cos\varphi_1+B\cos\varphi_2}$]

3. Tlumený harmonický oscilátor s činitelem jakosti $Q = 1$ koná nucené kmity. Jaká je perioda kmitů oscilátoru, je-li maximální (a) amplituda kmitů, (b) výkon vynucovací síly?

[*řešení:* (a) $T = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\omega_0}$, (b) $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$]

4. Rezonanční křivku $\frac{F_0^2\Omega^2\delta}{m[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2]}$ můžeme v oblasti rezonance $\Omega \approx \omega_0$ aproximovat Lorentziánem $\frac{F_0^2\delta}{4m[(\omega_0-\Omega)^2+\delta^2]}$. Jaká je pološířka w (tj. šířka v polovině maxima) obou křivek?

[*řešení:* $w = 2\delta$ pro rezonanční křivku i pro Lorentzián]

5. Jakou rychlostí se vůči Zemi musí pohybovat hvězda aby její červené světlo (vlnová délka $\lambda_0 = 630$ nm) nebylo okem vidět? Rozsah vlnových délek viditelných lidským okem je od $\lambda_1 = 390$ nm po $\lambda_2 = 790$ nm.

[*řešení:* $v_{1,2} = c\frac{\lambda_{1,2}-\lambda_0}{\lambda_0}$. Hvězda se musí od Země vzdalovat rychlostí $v_2 = 0.25\ c$ (červený posuv) nebo přibližovat rychlostí $v_1 = 0.38\ c$ (modrý posuv).]

Pozn.: S uvážením efektů speciální teorie relativity platí pro rychlost hvězdy přesnější vztah $v_{1,2} = c\frac{\lambda_{1,2}^2-\lambda_0^2}{\lambda_{12}^2} - \lambda_0^2$. Hvězda se tedy ve skutečnosti musí pohybovat rychlostí 0.22 c směrem k Zemi nebo rychlostí 0.45 c směrem od Země.

6. V době, kdy Christian Doppler vybudoval teorii Dopplerova posuvu (1842), bylo velmi obtížné tuto teorii experimentálně potvrdit. První serióznější experimentální důkaz tohoto jevu poskytl v roce 1845 nizozemský meteorolog Christophe Ballot. Žil totiž blízko železniční dráhy, a tak ho velmi upoutala změna frekvence píšťaly při projíždění vlaků. Uspořádal tedy následující veřejnou demonstraci. Nechal k vlaku připojit vozík, na kterém jelo několik hráčů na trumpetu. Další hráči stáli ve stanici. Vlakvedoucí poté velkou rychlostí projel kolem nádraží. Přestože všichni hráči při tom hráli tu samou notu na naladěné nástroje, hráči ve vlaku zněli díky svému pohybu lidem stojícím na nádraží falešně.

(a) Když se vlak přibližoval ke stanici, zněli hráči ve vlaku níž, nebo výš než hráči ve stanici? Jak to bylo, když vlak stanici projel a vzdaloval se od ní?
(b) Jak velkou musel jet vlak rychlostí, aby se frekvence obou skupin trumpetistů lišila o půltón? Podíl frekvencí dvou tónů vzdálených o půltón je $\sqrt[12]{2}$. Rychlost zvuku při 20°C je $v = 343$ m s^{-1}
(c) Jaká by byla frekvence vzniklých záznějů, kdyby hráči hráli tón s frekvencí $f = 440$ Hz (komorní a) a vlak se pohyboval rychlostí $w = 20$ km h^{-1}?

[*řešení:* (a) Zněli výš, když se vlak přibližoval, a níž, když se vzdaloval.
(b) Vlak by se musel přibližovat rychlostí $v_1 = 69.3$ km h^{-1} nebo vzdalovat rychlostí $v_2 = 73.4$ km h^{-1}.
(c) Frekvence záznějů je $f_1 = 7.2$ Hz při přibližování vlaku a $f_2 = 7.0$ Hz při vzdalování.]

Základní vztahy a údaje

Netlumené kmity

potenciální energie pružnosti	$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$
kinetická energie oscilátoru	$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$
celková energie oscilátoru	$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$

Komplexní reprezentace

komplexní exponenciála	$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$
komplexní čísla	$z = z_1 + iz_2 = \mathrm{Re}[z] + i\mathrm{Im}[z]$
	$z = e^{\alpha} = e^{\alpha_1 + i\alpha_2} = \lvert z\rvert(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$
	$z_1 = \mathrm{Re}[z] = e^{\alpha_1}\cos\alpha_2$
	$z_2 = \mathrm{Im}[z] = e^{\alpha_1}\sin\alpha_2$

Nucené kmity

pohybová rovnice	$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\Omega t$
partikulární řešení	$x(t) = A_0\sin(\Omega t + \vartheta)$
amplituda	$A_0(\Omega) = \frac{F_0}{m}\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right]^{-1/2}$
fázový posuv	$\mathrm{tg}\vartheta(\Omega) = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$
výkon vynucovací síly	$P_F(\Omega) = \frac{F_0^2\Omega^2\delta}{m}\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2\right]^{-1}$
Lorentzián	$P_F(\Omega) = \frac{F_0^2\delta}{4m}\left[(\Omega - \omega_0)^2 + \delta^2\right]^{-1}$
činitel jakosti	$Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$

Dopplerův posun

$$f = f_0\frac{v + v_p}{v + v_s}$$

kde v rychlost je šíření vlnění (zvuku), v_s rychlost je pohybu zdroje vlnění (zvuku) a v_p je rychlost pohybu pozorovatele.