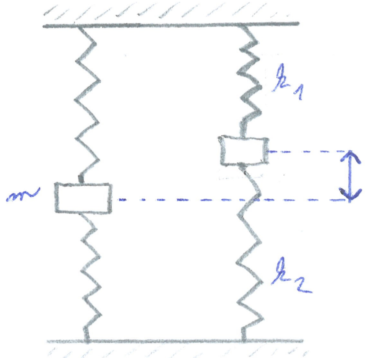
a) pružiny naproti sobě



y ... výchylka z rovnovážné polohy

⇒ výsledná síla

$$F = F_1 + F_2$$
$$F_1 = -k_1 y$$
$$F_2 = -k_2 y$$

↑ rovnováha ⇒ výsledná síla $F=0$

... rovnováha tíhové síly a sil pružnosti !!!

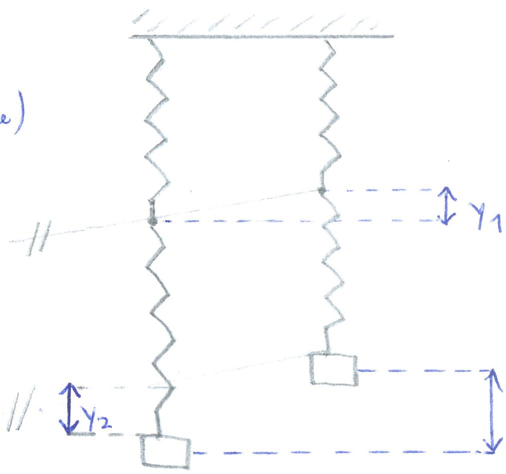
⇒ pohybová rovnice : $m\ddot{y} = -(k_1+k_2)\,y$

→ řešení rovnice $\ddot{y} = -\omega^2 y$ má tvar $y = A\sin(\omega t + \delta)$, kde konstanty A, δ záleží na počátečních podmínkách

$$\Rightarrow \quad \omega_a = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$$

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$$

b) pružiny za sebou (stejná úvaha o rovnováze)



$y = y_1 + y_2$

výsledná síla

$$F = F_1 = F_2$$
$$F_1 = -k_1 y$$
$$F_2 = -k_2 y$$

⇒ pohybová rovnice :

$$m\ddot{y} = -k_1 y_1$$
$$m\ddot{y} = -k_2 y_2$$

platí
$$y = y_1 + y_2$$
$$k_1 y_1 = k_2 y_2 \qquad \Rightarrow \quad y = y_1 \left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right)$$

$$y_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} y$$

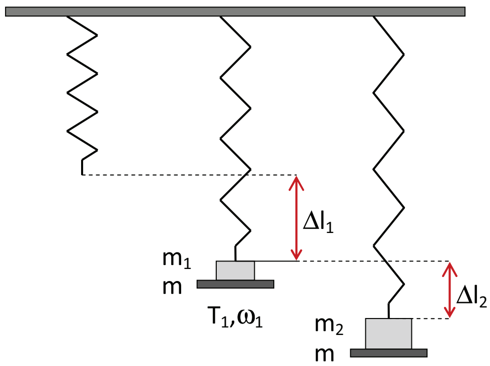
$$y_2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} y$$

zpět k pohybové rovnici:
$$m \ddot{y} = -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} y \qquad = -k_1 y_1 = -k_2 y_2$$

$$\Rightarrow \omega_b = \sqrt{\frac{1}{m} \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}$$

$$T_b = \frac{2\pi}{\omega_b} = 2\pi \sqrt{m \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}}$$

Zadání: 2. Na svislé pružině o zanedbatelné hmotnosti je zavěšena destička o hmotnosti $m = 20$ g a na ní leží závaží o hmotnosti $m_1 = 5$ g. Rozkmitáme-li pružinu, zjistíme, že perioda kmitů je $T_1 = \pi/3$ s. Poté závaží m_1 nahradíme jiným o hmotnosti $m_2 = 25$ g. Jaká je vzdálenost ΔL, o kterou se posune destička vůči předchozí poloze (tj. poloze se závažím m_1)?



Řešení: Pro případ kmitání destičky m a závažíčka m_1 má pro tuhost pružiny k pohybová rovnice tvar:

$$(m + m_1)\ddot{y} = -ky.$$

Řešením této diferenciální rovnice je funkce $y(t) = A \sin(\omega_1 t + \varphi)$, kde konstanty A a φ závisejí na počátečních podmínkách. Úhlová frekvence ω_1 a perioda kmitů T_1 jsou dány jako:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{k}{m + m_1}} \\ T_1 &= \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \end{aligned}$$

odkud si můžeme vyjádřit tuhost pružiny

$$k = \frac{4\pi^2}{T_1^2}(m + m_1).$$

Nyní sledujme prodloužení pružiny (viz obrázek). Pro destičku m a závažíčko m_1 se pružina prodlouží o Δl_1. Po záměně závažíčka m_2 za m_1 se pružina prodlouží ještě o Δl_2, čili celkové prodloužení je v tomto případě $\Delta l_1 + \Delta l_2$. Vyjádříme-li si toto pomocí rovnic pro rovnováhu sil (rovnováha tíhové síly a síly pružnosti), dostaneme:

$$\begin{aligned} (m + m_1)g &= k\Delta l_1 \\ (m + m_2)g &= k(\Delta l_1 + \Delta l_2) \\ \Delta l_2 &= \frac{(m_2 - m_1)g}{k}. \end{aligned}$$

Z poslední rovnosti dosazením za tuhost pružiny obdržíme výsledný vztah a číselný výsledek 21.8 cm.

$$\Delta l_2 = \frac{T_1^2}{4\pi^2}\frac{m_2 - m_1}{m + m_1}g$$

Zadání: Na svislou pružinu o zanedbatelné hmotnosti zavěsíme závaží o hmotnosti m, načež se pružina prodlouží o délku ΔL. Pružinu se závažím natáhneme o délku L a necháme kmitat. Určete časovou závislost výchylky závaží $x(t)$ a jeho rychlosti $v(t)$.

Řešení: Pro závaží a pružinu, které jsou v klidu, je výslednice působících sil nulová, neboli tíhová síla a síla pružiny mají stejnou velikost a opačný směr.

$$mg = k\Delta L \tag{1}$$

Obecné řešení pohybu harmonického oscilátoru má tvar:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)\,, \tag{2}$$

kde A, ω a φ značí po řadě amplitudu kmitů, úhlovou frekvenci a fázový posuv. Rychlost $v(t)$ získáme derivací okamžité výchylky $x(t)$ podle času.

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = A\omega\cos(\omega t + \varphi) \tag{3}$$

Pro úhlovou frekvenci kmitání tělesa o hmotnosti m na pružině s tuhostí k platí známý vztah:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Z rovnice (1) si můžeme vyjádřit tuhost pružiny k a vypočítat úhlovou frekvenci.

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta L}} \tag{4}$$

Amplitudu kmitů A a fázový posuv φ vypočítáme ze znalosti počátečních podmínek.

$$\begin{aligned} L &= y(t=0) = A\sin\varphi \\ 0 &= v(t=0) = A\omega\cos\varphi \end{aligned}$$

Z druhé rovnice vidíme, že fázový posuv $\varphi = \pi/2$ nebo $\varphi = 3\pi/2$. Dosaďme tyto hodnoty do první rovnice, vypočítejme amplitudu A a vyjádřeme řešení $x(t)$ a $v(t)$.

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\pi}{2} \\ L &= A\sin\varphi = A \\ \Rightarrow x(t) &= L\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = L\cos(\omega t) \\ v(t) &= L\omega\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -L\omega\sin(\omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{3\pi}{2} \\ L &= A\sin\varphi = -A \\ \Rightarrow x(t) &= -L\sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = L\cos(\omega t) \\ v(t) &= -L\omega\cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = -L\omega\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Dostáváme tedy jediné řešení, které má po dosazení úhlové frekvence ω z rovnice (4) tvar:

$$x(t) = L\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\Delta L}}t\right)$$

$$v(t) = -\sqrt{\frac{gL^2}{\Delta L}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{\Delta L}}t\right)$$

- součet funkcí sinus / kosinus

→ součtové vzorce

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

$$\Rightarrow \sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cos y$$

$$x+y = a \quad x-y = b \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a+b}{2} \quad y = \frac{a-b}{2}$$

$$\underline{\underline{\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}}$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\Rightarrow \cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y$$

$$x+y = a \quad x-y = b \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a+b}{2} \quad y = \frac{a-b}{2}$$

$$\underline{\underline{\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}}$$

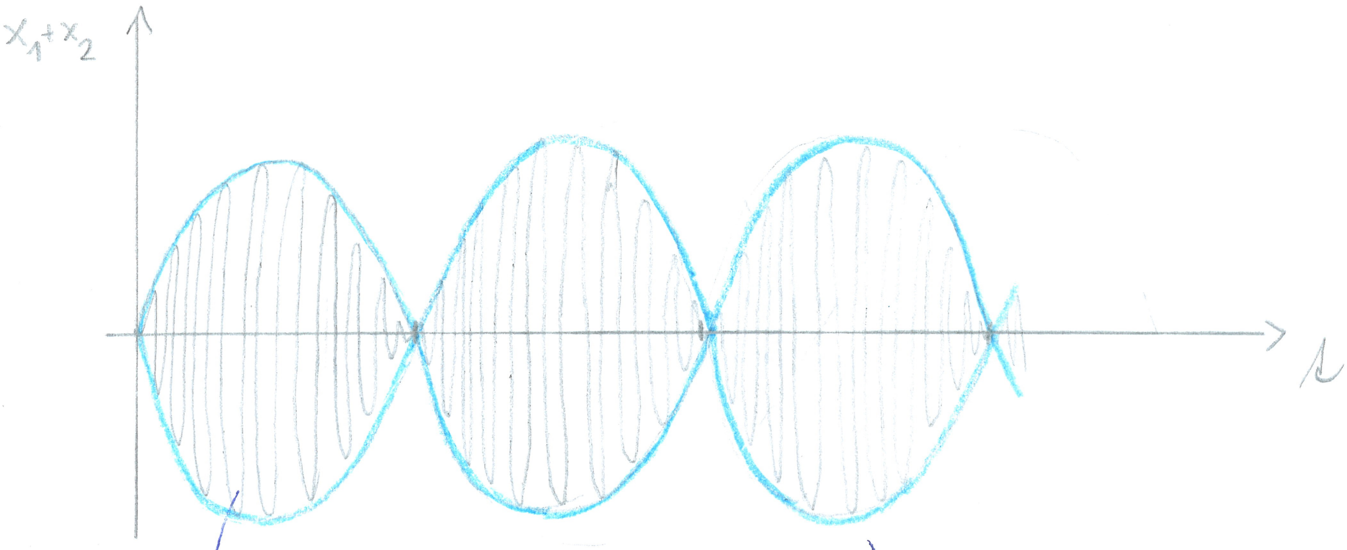
- součet 2 kmitů ve fázi (!) + se stejnou amplitudou

$$\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t) = 2 \sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2} t\right)$$
$$= 2 \sin\left(2\pi \frac{f_1+f_2}{2} t\right) \cos\left(2\pi \frac{f_1-f_2}{2} t\right)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\bar{f} = \frac{f_1+f_2}{2} \qquad \tilde{f} = \frac{f_1-f_2}{2}$$

P10.4-2



harmonické kmity
s průměrnou frekvencí $\bar{f}$

$$\bar{f} = \frac{f_1+f_2}{2} = 437{,}5\ \mathrm{Hz}$$

modulace amplitudy → ZÁZNĚJE
s frekvencí $2\tilde{f}$

$$\Downarrow$$

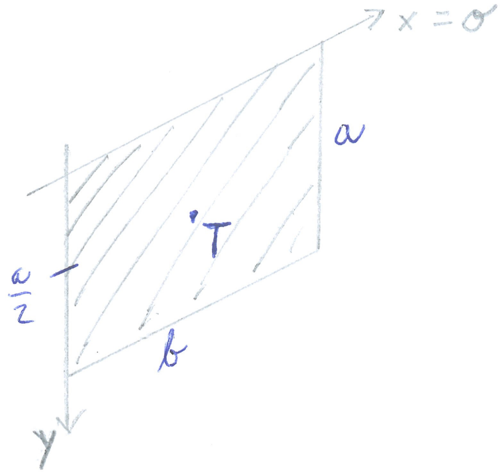
$$T = \frac{1}{2\tilde{f}} = \frac{1}{f_1-f_2} = 0{,}2\ \mathrm{s}$$

a) deska → moment setrvačnosti

$$I_0 = \frac{m}{ab}\int_0^a\int_0^b y^2\,dx\,dy = \frac{m}{ab}\left[x\right]_0^b\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^a$$

zanedbáme tloušťku desky

$$\underline{I_0 = \frac{1}{3} m a^2}$$



→ hmotný střed

$$y_T = \frac{a}{2}$$

→ perioda kmitů: $$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\overbrace{\frac{1}{3} m a^2}^{I_0}}{mg\underbrace{\frac{a}{2}}_{y_T}}} = \underline{\underline{2\pi\sqrt{\frac{2a}{3g}}}}$$

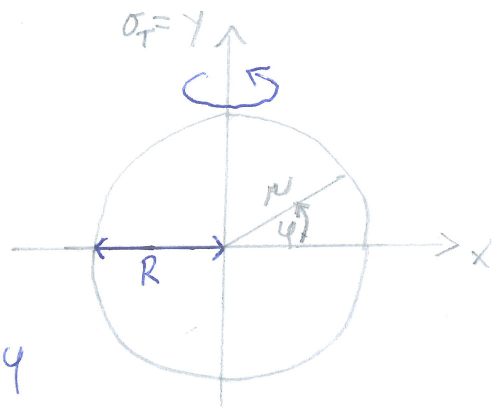
fyzické kyvadlo

b) deska s dírou → moment setrvačnosti

$$I = I_0 - I'$$

deska

kruhový disk

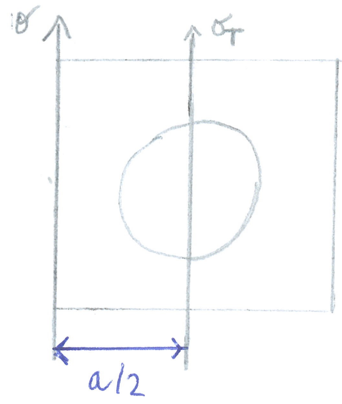


$$I'_T = \frac{m'}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R (r\cos\varphi)^2\, r\,dr\,d\varphi$$

$$= \frac{m'}{\pi R^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi}_{=\pi} \underbrace{\int_0^R r^3 \, dr}_{\frac{R^4}{4}} = \underline{\frac{1}{4} m' R^2}$$

$$= \left[\frac{\varphi + \sin\varphi \cos\varphi}{2} \right]_0^{2\pi}$$

Steinerova věta



$$I' = I'_T + m' \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\underline{I' = \frac{1}{4} m' R^2 + \frac{1}{4} m' a^2}$$

→ hmotnosti: deska: $m = \sigma a b$ ⇒ $\sigma = \frac{m}{ab}$

↑ plošná hustota

disk/díra: $m' = \sigma \pi R^2 = m \frac{\pi R^2}{ab}$

deska s dírou: $M = m - m' = m \left(1 - \frac{\pi R^2}{ab}\right)$

→ hmotný střed: $y_T = \frac{a}{2}$

→ perioda kmitů

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} m a^2 - \frac{1}{4} m \frac{\pi R^2}{ab} R^2 - \frac{1}{4} m \frac{\pi R^2}{ab} a^2}{m\left(1 - \frac{\pi R^2}{ab}\right) g \frac{a}{2}}}$$

$$T = \underbrace{2\pi \sqrt{\frac{2a}{3g}}}_{T_0} \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{4} \frac{\pi R^2}{ab}\left(1 + \frac{R^2}{a^2}\right)}{\left(1 - \frac{\pi R^2}{ab}\right)}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2a}{3g}} \sqrt{\frac{ab - \frac{3}{4}\pi R^2\left(1 + R^2/a^2\right)}{ab - \pi R^2}}$$

Příklad 10.6.

a) aperiodický pohyb

– obecné řešení: $x(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t}$, kde $\alpha_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

označení: $\psi = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\delta t}\left(c_1 e^{\psi t} + c_2 e^{-\psi t}\right)$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = e^{-\delta t}\left(c_1(-\delta+\psi)e^{\psi t} + c_2(-\delta-\psi)e^{-\psi t}\right)$$

– počáteční podmínky: $x(t=0) = \underline{0} = e^0\left(c_1 e^0 + c_2 e^0\right) = \underline{c_1 + c_2}$

$$v(t=0) = u = e^0\left(c_1(-\delta+\psi)e^0 + c_2(-\delta-\psi)e^0\right)$$

$$\underline{u = c_1(-\delta+\psi) + c_2(-\delta-\psi)}$$

$$c_1 = -c_2$$

$$u = -c_1\delta + c_1\psi + c_1\delta + c_1\psi = 2c_1\psi$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{u}{2\psi} \qquad \Rightarrow c_2 = \frac{u}{2\psi}$$

$$x(t) = \frac{u}{\psi} e^{-\delta t}\left(\frac{e^{\psi t} - e^{-\psi t}}{2}\right)$$

$$\underline{\underline{x(t) = \frac{u \cdot e^{-\delta t}}{\psi} \sinh(\psi t)}}$$

b) mezní aperiodický pohyb

- obecné řešení: $x(t) = c_1 e^{-\delta t} + c_2 t e^{-\delta t}$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -c_1 \delta e^{-\delta t} + c_2 e^{-\delta t} - c_2 \delta t e^{-\delta t}$$

- počáteční podmínky: $x(t=0) = \underline{0} = c_1 e^{0} + c_2 \cdot 0 \cdot e^{0} = \underline{c_1}$

$$v(t=0) = \underline{u} = -c_1 \delta e^{0} + c_2 e^{0} - c_2 \delta \cdot 0 e^{0} = \underline{c_2}$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = 0 \qquad c_2 = u$$

$$\underline{\underline{x(t) = u t e^{-\delta t}}}$$

c) tlumené kmity

- obecné řešení: $x(t) = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$

označení: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\delta A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) + \omega A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

- počáteční podmínky: $x(t=0) = \underline{0} = A \cdot e^{0} \sin(0 + \varphi) = \underline{A \sin\varphi}$

$$v(t=0) = u = -\delta A e^{0} \sin(0 + \varphi) + \omega A e^{0} \cos(0 + \varphi)$$

$$\underline{u = -\delta A \sin\varphi + \omega A \cos\varphi}$$

$$\varphi = 0$$

$$u = \omega A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{u}{\omega}$$

$$x(t) = \frac{u}{\omega} e^{-\delta t} \sin(\omega t)$$

Příklad 10.7.

a) řešení ve tvaru

$$x(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t}$$

$$\dot{x}(t) = c_1 \alpha_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 \alpha_2 e^{\alpha_2 t}$$

$$\ddot{x}(t) = c_1 \alpha_1^2 e^{\alpha_1 t} + c_2 \alpha_2^2 e^{\alpha_2 t}$$

$\downarrow$

dosadit do rovnice $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

+ podmínka $\omega_0 > \delta$

$$\Rightarrow c_1 \alpha_1^2 e^{\alpha_1 t} + c_2 \alpha_2^2 e^{\alpha_2 t} + 2\delta c_1 \alpha_1 e^{\alpha_1}$$

$$+ 2\delta c_2 \alpha_2 e^{\alpha_2 t} + \omega_0^2 c_1 e^{\alpha_1 t} + \omega_0^2 c_2 e^{\alpha_2 t} = 0$$

$$c_1 e^{\alpha_1 t}\left(\alpha_1^2 + 2\delta\alpha_1 + \omega_0^2\right) + c_2 e^{\alpha_2 t}\left(\alpha_2^2 + 2\delta\alpha_2 + \omega_0^2\right) = 0$$

→ závorky musejí být nulové

→ stejné rovnice pro α_1 a α_2

→ jediná rovnice ~~o~~ pro α s kořeny α_1 a α_2

$$\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 = 0$$

$$\alpha_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2\delta \pm \sqrt{4\delta^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

výraz pod odmocninou záporný kvůli podmínce $\omega_0 > \delta$

$$\Rightarrow \alpha_{1/2} = \frac{-2\delta \pm 2i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}{2}$$

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm i\omega$$

$\downarrow$

označení

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$\Rightarrow$ 1. tvar řešení: $x(t) = c_1 e^{-\delta t} e^{+i\omega t} + c_2 e^{-\delta t} e^{-i\omega t}$

$$x(t) = e^{-\delta t}\left(c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}\right)$$

... komplexní řešení

b) řešení ve tvaru $x(t) = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$

$$\dot{x}(t) = -\delta A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) + \omega A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = \delta^2 A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) - \delta\omega A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) - \omega^2 A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) - \delta\omega A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

2x

$\downarrow$

dosadit do rovnice $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

+ podmínka $\omega_0 > \delta$

$$\Rightarrow \delta^2 A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) - 2\delta\omega A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$-\omega^2 A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) - 2\delta^2 A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$+2\delta\omega A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) = 0$$

$$A e^{-\delta t} \sin(\omega t+\delta) \underbrace{\begin{pmatrix}\delta^2-\omega^2+\omega_0^2 \\ -2\delta^2\end{pmatrix}}_{=0} + A e^{-\delta t}\cos(\omega t+\delta)\underbrace{\left(-2\delta\omega+2\delta\omega\right)}_{\substack{=0 \\ \text{automaticky}}} = 0$$

$$-\delta^2-\omega^2+\omega_0^2=0$$

$$\omega^2=\omega_0^2-\delta^2$$

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$$

$\Rightarrow$ 2. tvar řešení : $x(t) = A e^{-\delta t}\sin(\omega t+\varphi)$

... reálné řešení

c) konstanty v 1. řešení C_1 a C_2
konstanty v 2. řešení A a φ } určené počátečními podmínkami

$\downarrow$

vzájemný vztah

1. tvar $\nwarrow$ $x(t) = x(t)$ $\nearrow$ 2. tvar

$$e^{-\delta t}\left(c_1 e^{i\omega t}+c_2 e^{-i\omega t}\right) = A e^{-\delta t}\sin(\omega t+\varphi)$$

$$e^{-\delta t}\left(c_1\cos\omega t+ic_1\sin\omega t + c_2\cos\omega t - ic_2\sin\omega t\right) = A e^{-\delta t}\left(\sin\omega t\cos\varphi+\sin\varphi\cos\omega t\right)$$

$e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$
$e^{-i\alpha}=\cos\alpha-i\sin\alpha$

$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x$

$$e^{-\delta t}\cos\omega t\,(c_1+c_2) + e^{-\delta t}\sin\omega t\,(ic_1 - ic_2) = e^{-\delta t}\cos\omega t\,(A\sin\varphi) + e^{-\delta t}\sin\omega t\,(A\cos\varphi)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} c_1+c_2 &= A\sin\varphi \qquad (1)\\ i(c_1-c_2) &= A\cos\varphi \qquad (2)\end{aligned}}$$

$(1)/(2)$
$$\frac{c_1+c_2}{i(c_1-c_2)} = \frac{A\sin\varphi}{A\cos\varphi} \Rightarrow \underline{\operatorname{tg}\varphi = \frac{c_1+c_2}{i(c_1-c_2)}}$$

$(1)^2+(2)^2$
$$c_1^2+2c_1c_2+c_2^2 \underset{\uparrow\, i^2}{-} (c_1^2-2c_1c_2+c_2^2) = A^2\sin^2\varphi + A^2\cos^2\varphi$$

$$4c_1c_2 = A^2 \Rightarrow \underline{A = \sqrt{4c_1c_2}}$$

(1): $c_1 = A\sin\varphi - c_2$

$\Rightarrow (2)$: $iA\sin\varphi - ic_2 - ic_2 = A\cos\varphi$

$$-2ic_2 = A\cos\varphi - iA\sin\varphi$$

$$c_2 = -\frac{A}{2i}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

$$\underline{c_2 = -\frac{A}{2i}e^{-i\varphi}}$$

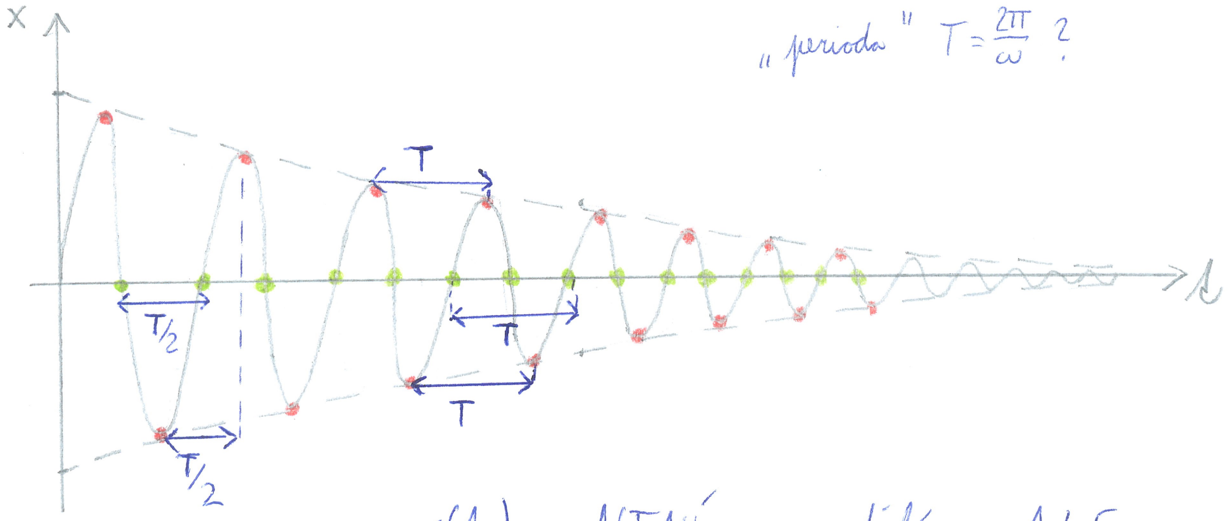
$$c_1 = A\sin\varphi + \frac{A}{2i}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \frac{A}{2i}(2i\sin\varphi + \cos\varphi - i\sin\varphi)$$

$$c_1 = \frac{A}{2i}(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \underline{\frac{A}{2i}e^{i\varphi}}$$

Příklad 10.8.

$$x(t) = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$$

„perioda" $T = \frac{2\pi}{\omega}$?



$x(t)$ NENÍ periodická ALE:

(i) vzdálenost nulových bodů $(x=0)$ je $T/2$

(ii) vzdálenost sousedních lokálních maxim a minim je $T/2$

důkaz: i) nulové body

$$x(\bar{t}) = 0 = \underbrace{A \cdot e^{-\delta \bar{t}}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\sin(\omega \bar{t} + \varphi)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \sin(\omega \bar{t} + \varphi) = 0$$

PERIODA $\frac{T}{2}$ $\rightarrow$ $\sin\left(\omega\left(\bar{t} + \frac{T}{2}\right) + \varphi\right) = 0$

$$0 \overset{*}{=} \underbrace{\sin(\omega \bar{t} + \varphi)}_{=0} \cos\left(\omega \frac{T}{2}\right) + \underbrace{\cos(\omega \bar{t} + \varphi)}_{\neq 0} \underbrace{\sin\left(\omega \frac{T}{2}\right)}_{=0}$$

* součtový vzorec
$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$$\sin \omega \frac{T}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega \frac{T}{2} = k\pi$$

$k = 1$

$$\underline{\underline{T = \frac{2\pi}{\omega}}}$$

iii) lokální maxima a minima

$$\dot{x}(\tilde{t}) = 0$$

$$\dot{x}(t) = -\delta A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) + \omega A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$0 = \underbrace{A e^{-\delta \tilde{t}}}_{\neq 0} \Big(\underbrace{-\delta \sin(\omega \tilde{t} + \varphi) + \omega \cos(\omega \tilde{t} + \varphi)}_{=0} \Big)$$

$$\Rightarrow -\delta \sin(\omega \tilde{t} + \varphi) + \omega \cos(\omega \tilde{t} + \varphi) = 0$$

PERIODA $\frac{T}{2}$ $\rightarrow$ $-\delta \sin\left(\omega\left(\tilde{t} + \frac{T}{2}\right) + \varphi\right) + \omega \cos\left(\omega\left(\tilde{t} + \frac{T}{2}\right) + \varphi\right) = 0$

* součtové vzorce

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$$0 \overset{*}{=} -\delta \sin(\omega \tilde{t} + \varphi) \cos\left(\omega \frac{T}{2}\right) - \delta \cos(\omega \tilde{t} + \varphi) \sin\left(\omega \frac{T}{2}\right) + \omega \cos(\omega \tilde{t} + \varphi) \cos\left(\omega \frac{T}{2}\right) - \omega \sin(\omega \tilde{t} + \varphi) \sin\left(\omega \frac{T}{2}\right)$$

$$0 = \cos\left(\omega \frac{T}{2}\right) \Big(\underbrace{-\delta \sin(\omega \tilde{t} + \varphi) + \omega \cos(\omega \tilde{t} + \varphi)}_{=0} \Big) + \underbrace{\sin\left(\omega \frac{T}{2}\right)}_{=0} \underbrace{\Big(-\delta \cos(\omega \tilde{t} + \varphi) - \omega \sin(\omega \tilde{t} + \varphi) \Big)}_{\neq 0}$$

$$\sin \omega \frac{T}{2} = 0 \iff \omega \frac{T}{2} = k\pi \quad \Big) k = 1$$

$$\underline{\underline{T = \frac{2\pi}{\omega}}}$$

* střídání maxim a minim $\Rightarrow$ vzdálenost sousedních maxim $\ldots 2 \cdot \frac{T}{2} = T$

=||= minim $\ldots 2 \cdot \frac{T}{2} = T$

∇
$\circ$