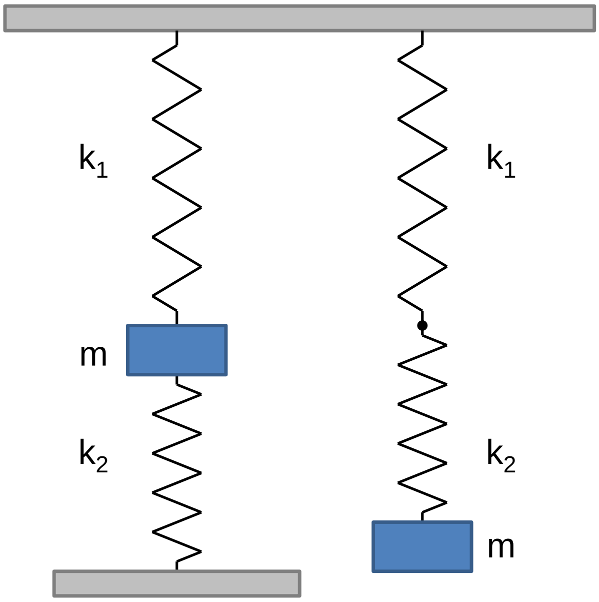
Cvičení 10 - harmonický oscilátor, tlumené kmity

1. Jaká bude perioda kmitů T závaží o hmotnosti m zavěšeného na pružinách s tuhostmi k_1 a k_2 podle obrázku?



[*řešení:* uspořádání vlevo: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$, uspořádání vpravo: $T = 2\pi\sqrt{\frac{(k_1+k_2)m}{k_1 k_2}}$]

2. Na svislé pružině o zanedbatelné hmotnosti je zavěšena destička o hmotnosti $m = 20$ g a na ní leží závaží o hmotnosti $m_1 = 5$ g. Rozkmitáme-li pružinu, zjistíme, že perioda kmitů je $T_1 = \pi/3$ s. Poté závaží m_1 nahradíme jiným o hmotnosti $m_2 = 25$ g. Jaká je vzdálenost ΔL, o kterou se posune destička vůči předchozí poloze (tj. poloze se závažím m_1)?

[*řešení:* $\Delta L = \frac{T_1^2}{4\pi^2}\frac{m_2-m_1}{m+m_1}g = 21.8$ cm]

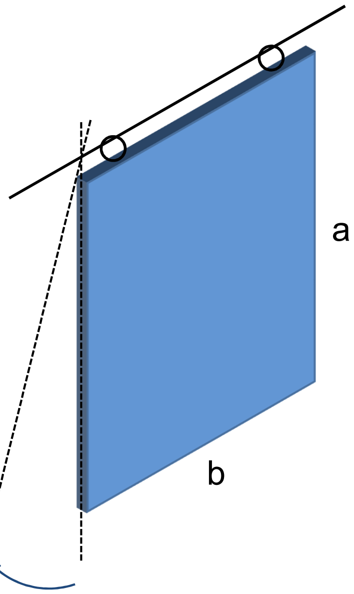
3. Na svislou pružinu o zanedbatelné hmotnosti zavěsíme závaží o hmotnosti m, načež se pružina prodlouží o délku ΔL. Pružinu se závažím natáhneme o délku L a necháme kmitat. Určete časovou závislost výchylky závaží $x(t)$ a jeho rychlosti $v(t)$.

[*řešení:* výchylka: $x(t) = L\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\Delta L}}\,t\right)$, rychlost: $v(t) = -\sqrt{\frac{gL^2}{\Delta L}}\sin\left(\sqrt{\frac{g}{\Delta L}}\,t\right)$]

4. Současně rozezvučíme dvě ladičky: jednu s frekvencí $f_1 = 440$ Hz (komorní A) a druhou mírně podladěnou na $f_2 = 435$ Hz. Jaká bude perioda T záznějů?

[*řešení:* $T = \frac{1}{f_1-f_2} = 0.2$ s]

5. Obdélníková deska o rozměrech a, b je zavěšena na vodorovné tyči podle obrázku. Desku vychýlíme o malý úhel od svislého směru. Tření v závěsech zanedbáváme.
(a) Vypočítejte s jakou periodou T bude deska kmitat.
(b) Jak se tato perioda změní, vyřízneme-li v desce díru o poloměru R?



[*řešení:* (a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{3g}}$, (b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{3g}}\sqrt{\frac{ab-\frac{3}{4}\pi R^2\left(1+\frac{R^2}{a^2}\right)}{ab-\pi R^2}}$]

6. Vypočítejte časovou závislost výchylky $x(t)$ hmotného bodu, který má v čase $t = 0$ nulovou výchylku a nenulovou rychlost u a koná:
(a) aperiodický pohyb,
(b) mezní aperiodický pohyb,
(c) tlumený harmonický pohyb.

[*řešení:*
(a) $x(t) = \frac{ue^{-\delta t}}{\psi}\sinh(\psi t)$, kde $\psi = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$
(b) $x(t) = ut\ e^{-\delta t}$,
(c) $x(t) = \frac{ue^{-\delta t}}{\omega}\sin(\omega t)$, kde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$]

7. Ověřte, že funkce $x(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$ a $x(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi)$ jsou obecným řešením pohybu tlumeného harmonického oscilátoru, tj. splňují rovnici $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Nalezněte vztah mezi konstantami C_1, C_2 a A, φ.

[*řešení:* $\alpha_1 = -\delta + i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, $\alpha_2 = -\delta - i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$
$C_1 = \frac{A}{2i}e^{i\varphi}$ a $C_2 = -\frac{A}{2i}e^{-i\varphi}$,
$A = \sqrt{4c_1c_2}$ a $\mathrm{tg}\varphi = \frac{C_1+C_2}{i(C_1-C_2)}$]

8. Ověřte, že perioda tlumených kmitů je $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

[*řešení:* Funkce $x(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi)$ sice fakticky není periodická (kvůli klesající amplitudě), ale časová odlehlost sousedních maxim (minim) a dvojnásobek časové vzdálenosti nulových výchylek je přesně $T = \frac{2\pi}{\omega}$.]

Základní vztahy a údaje

Harmonické kmity

pohybová rovnice	$\ddot{x} = -\omega^2 x$
obecné řešení	$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$
	$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$
síla pružiny	$F = -kx$
úhlová frekvence kmitů	$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
perioda kmitů	$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
potenciální energie pružnosti	$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2(\omega t + \varphi)$
kinetická energie oscilátoru	$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\cos^2(\omega t + \varphi)$
celková energie oscilátoru	$E = E_p + E_k = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$

Perioda kmitů fyzického kyvadla

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_T + MR^2}{MgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{MgR}}$,

kde I_T je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení procházející hmotným středem, I_o je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení o a R značí vzdálenost hmotného středu od osy otáčení o.

Tlumené kmity

pohybová rovnice	$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$
1. aperiodický pohyb ($\delta > \omega_0$)	$x(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$
	$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$
	$x(t) = e^{-\delta t}\left(C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}\right)$
	$\omega = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$
2. mezní aperiodický pohyb ($\delta = \omega_0$)	$x(t) = C_1 e^{-\delta t} + C_2 t e^{-\delta t}$
3. tlumené kmity ($\delta < \omega_0$)	$x(t) = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$
	$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

Komplexní reprezentace

komplexní exponenciála	$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$
komplexní čísla	$z = z_1 + iz_2 = \mathrm{Re}[z] + i\mathrm{Im}[z]$
	$z = e^{\alpha} = e^{\alpha_1 + i\alpha_2} = \lvert z\rvert(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$
	$z_1 = \mathrm{Re}[z] = e^{\alpha_1}\cos\alpha_2$
	$z_2 = \mathrm{Im}[z] = e^{\alpha_1}\sin\alpha_2$