Cvičení 1 - matematický úvod

1. Jsou dány trojice vektorů $\{\mathbf{u}\} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, 0, 1)$, $\{\mathbf{v}\} = (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$ a $\{\mathbf{w}\} = (1, -1, 2), (0, 2, 3), (2, 0, 7)$.
Která z těchto trojic může být bází trojrozměrného vektorového prostoru?

[*řešení:* $\{\mathbf{u}\}$, $\{\mathbf{v}\}$ jsou lineárně nezávislé]

2. Vektor $\mathbf{v}$ má v kartézských souřadnicích vyjádření $(2, 3, 5)$. Jaké bude mít vyjádření v bázi $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ a $(1, 1, 1)$?

[*řešení:* $\mathbf{v}' = (-1, -3, 6)$ neboli $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 + 6\mathbf{v}_3$]

3. Vektor $\mathbf{v}$ má v kartézské soustavě souřadnic vyjádření (x, y, z). Zapište tento vektor v kartézské souřadnicové soustavě, která je vůči původní pootočená okolo osy z o úhel α.

[*řešení:* $\mathbf{v}' = (x\cos\alpha + y\sin\alpha, -x\sin\alpha + y\cos\alpha, z)$]

4. Dokažte, že platí vztah $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

5. Najděte minimum E_B potenciálu $V(r) = -\frac{k}{r^6} + \frac{c}{r^{12}}$, kde k, c jsou kladné konstanty. Pro jakou hodnotou r_0 zadaný potenciál tohoto minima nabývá?

[*řešení:* $E_B = -\frac{k^2}{4c}$; $r_0 = \sqrt[6]{\frac{2c}{k}}$]

6. Hmotný bod se pohybuje po trajektorii $x(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \alpha)$. Vypočítejte okamžitou rychlost hmotného bodu.

[*řešení:* $v(t) = Ae^{-\delta t}\{-\delta\sin(\omega t + \alpha) + \omega\cos(\omega t + \alpha)\}$]

7. Spočtěte určitý integrál $I = \int_0^\pi \frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{z^2 - 2zr\cos\theta + r^2}}\mathrm{d}\theta$ pro proměnné $z > r$.

[*řešení:* $I = \frac{2r^2}{z}$]

8. V kartézských souřadnicích napište parametrické vyjádření trajektorie hmotného bodu, který se pohybuje:
(a) po kružnici v rovině xy, (b) po elipse v rovině xy, (c) po pravotočivé šroubovici, (d) po smyčce ve tvaru osmičky v rovině xy.

[*řešení:*
(a) $x(t) = r\cos\omega t$; $y(t) = r\sin\omega t$; $z(t) = 0$, r je poloměr kružnice, ω je úhlová rychlost pohybu
(b) $x(t) = a\cos\omega t$; $y(t) = b\sin\omega t$; $z(t) = 0$, a, b jsou velká a malá poloosa

elipsy, ω je úhlová rychlost pohybu
(c) $x(t) = r\cos\omega t$; $y(t) = r\sin\omega t$; $z(t) = v_z t$, r je poloměr šroubovice a v_z je rychlost stoupání
(d) $x(t) = a/2\sin 2\omega t$; $y(t) = a\sin\omega t$, a je průměr smyčky osmičky]

9. Napište parametrické vyjádření trajektorie kamínku, který se nachází v pneumatice o poloměru r auta jedoucího rovně s konstantní rychlostí v. Soustavu souřadnic zvolte tak, aby se v čase $t = 0$ kamínek nacházel v počátku soustavy souřadnic a auto se pohybuje ve směru osy x.

[*řešení:* $x(t) = vt - r\sin\left(\frac{vt}{r}\right)$, $y(t) = r - r\cos\left(\frac{vt}{r}\right)$. Křivka se nazývá cykloida.]

Základní vztahy

skalární součin: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

vektorový součin: $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

velikost vektoru: $|\mathbf{a}| = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})^{1/2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

počítání s vektory:

$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\alpha$, kde α je úhel mezi vektory **a** a **b**.

$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\alpha$, kde α je úhel mezi vektory **a** a **b**.

$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$.

$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathbf{c}$.

$(\alpha\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$, kde α je skalár.

$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$.

$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$.

$\mathbf{a}\times\mathbf{a} = 0$.

$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0$.

Derivace a primitivní funkce základních funkcí:

funkce $f(x)$	derivace $f'(x)$	primitivní funkce $F(x)$	podmínka
C	0	$C\ x$	$C \in \mathbf{R}$
x^n	$n\ x^{n-1}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$n \neq 0$
e^x	e^x	e^x	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x\,(\ln x - 1)$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	

Derivace součtu/rozdílu:

$[a\ f(x) \pm b\ g(x)]' = a\ f'(x) \pm b\ g'(x)$, kde $a, b \in \mathbf{R}$

Derivace součinu:

$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Derivace podílu:

$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Derivace složené funkce:

$[f(g(x))]' = f'(x)g'(x)$

Neurčitý integrál (primitivní funkce)

$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$, kde $F'(x) = f(x)$ a C je libovolná konstanta

Integrace „per partes“

$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$

Substituce v integrálu

$\int f\left(g(x)\right) g'(x)\mathrm{d}x = \int f(y)\mathrm{d}y$, kde $y = g(x)$

Určitý integrál

$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$