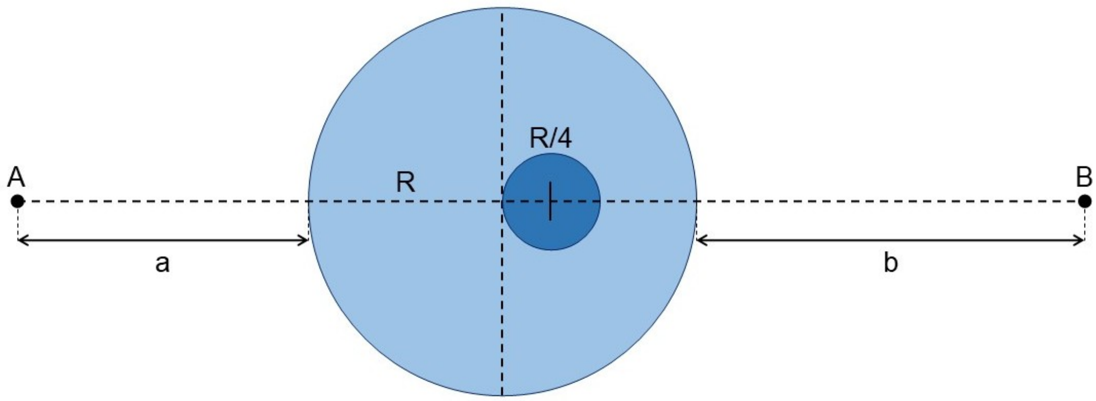
Řešení testu 2

Mechanika a kontinuum
NAFY001

čtvrtek 4. ledna 2023

Příklad 1

Zadání: Uvnitř koule o poloměru R je kulové jádro o poloměru $R/4$. Střed jádra je ve vzdálenosti $R/4$ od středu koule a jeho hustota je 3krát větší než hustota koule, viz obrázek. Vypočítejte poměr gravitačních zrychlení v bodech A a B, jsou-li jejich vzdálenosti od povrchu velké koule $a = 1.5R$, $b = 2R$.



Řešení: Velikost intenzity gravitačního pole homogenní koule o hmotnosti M ve vzdálenosti r od jejího středu (vně koule) je:

$$K(r) = \frac{GM}{r^2} \tag{1}$$

Vzhledem k symetrickému rozmístění bodů A a B vůči oběma koulím, bude gravitační zrychlení v bodech A a B rovno součtu intenzity gravitačního pole velké koule a **dodatečné intenzity** gravitačního malé koule.

$$a_A = \frac{GM}{\left(\frac{3}{2}R + R\right)^2} + \frac{Gm}{\left(\frac{3}{2}R + \frac{5}{4}R\right)^2} \tag{2}$$

$$a_B = \frac{GM}{\left(2R + R\right)^2} + \frac{Gm}{\left(2R + \frac{3}{4}R\right)^2} \tag{3}$$

Dodatečnou intenzitu od malé koule si můžeme představit jako gravitační působení homogenní koule o hmotnosti m a hustotě 2krát[1] větší než hustota velké koule. Z tohoto poměru hustot si můžeme vyjádřit neznámou hmotnost m a dosadit ji do rovnic (2) a (3), vypočítat gravitační zrychlení v bodech A a B a jejich poměr.

$$2\frac{M}{V} = \frac{m}{v} \tag{4}$$

$$2\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{4}\right)^3}$$

$$m = \frac{1}{32}M \tag{5}$$

[1] Jedná se o hustotu dodatečné koule. Plná koule přirozeně obsahuje malou kouli o stejné hustotě ϱ. Aby mělo skutečné jádro hustotu trojnásobnou, musí být hustota dodatečné koule $3\varrho - \varrho = 2\varrho$.

$$
\begin{aligned}
a_A &= \frac{GM}{R^2}\left[\frac{1}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} + \frac{1}{32\left(\frac{11}{4}\right)^2}\right] \\
a_A &= \frac{GM}{R^2}\left(\frac{4}{25} + \frac{1}{242}\right) \\
a_A &= \frac{GM}{R^2}\frac{993}{6050} \doteq 0.1641\frac{GM}{R^2}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

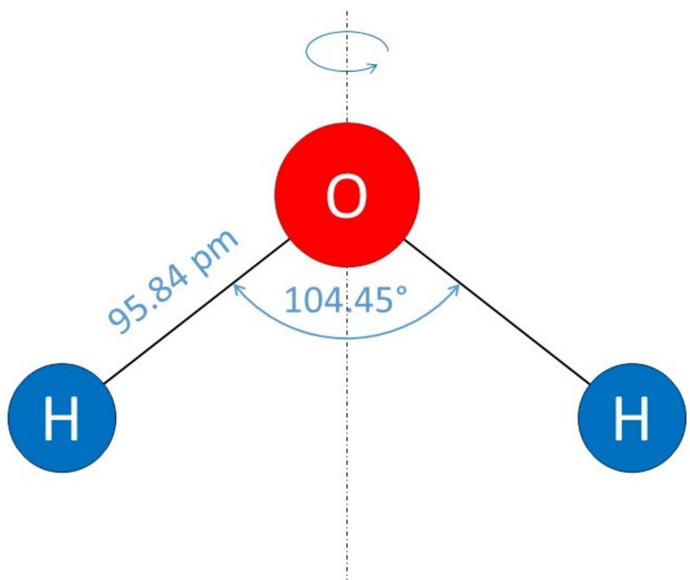
$$
\begin{aligned}
a_B &= \frac{GM}{R^2}\left[\frac{1}{(3)^2} + \frac{1}{32\left(\frac{11}{4}\right)^2}\right] \\
a_B &= \frac{GM}{R^2}\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{242}\right) \\
a_B &= \frac{GM}{R^2}\frac{251}{2178} \doteq 0.1152\frac{GM}{R^2}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$$
\frac{a_A}{a_B} = \frac{8937}{6275} \doteq 1.42 \tag{8}
$$

Příklad 2

Zadání: Molekula vody znázorněná na obrázku se otáčí s frekvencí $f = 2.3$ THz kolem osy otáčení procházející středem atomu kyslíku. Vypočítejte kinetickou energii rotace molekuly vody, výsledek uveďte v jednotkách elektronvolt.
Relativní atomové hmotnosti vodíku a kyslíku jsou 1.008 a 15.999, hmotnostní konstanta $\mu = 1.66057 \times 10^{-27}$ kg, 1 eV $= 1.602 \times 10^{-19}$ J.

Poznámka: Hmota atomu je téměř výhradně soustředěna v jádře, jehož rozměry jsou ve srovnání s rozměry atomů a molekul zanedbatelné.



Řešení: Kinetická energie rotace je dána jako:

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2, \tag{1}$$

kde J je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k dané ose otáčení a $\omega = 2\pi f$ je úhlová frekvence otáčení.

Moment setrvačnosti molekuly vody je roven součtu momentů setrvačnosti dvou atomů vodíku a momentu setrvačnosti atomu kyslíku. Většina hmotnosti atomů je soustředěna v jejich jádrech o zanedbatelných rozměrech, můžeme proto počítat s jednotlivými atomy jako s hmotnými body. Moment setrvačnosti kyslíku je tudíž nulový a počítáme pouze s atomy vodíku. Moment setrvačnosti hmotného bodu vzdáleného od osy otáčení r je roven:

$$J = mr^2. \tag{2}$$

Hmotnost atomu vodíku je rovna součinu jeho relativní atomové hmotnosti a hmotnostní konstanty.

$$m_{\mathrm{H}} = \mu A_r(\mathrm{H}) \tag{3}$$

Označme $L = 95.84$ pm jako délku vazby O-H a $\alpha = 104.45°$ jako úhel mezi vazbami H-O-H. Kolmá vzdálenost vodíku od osy otáčení je potom:

$$r = L \sin \frac{\alpha}{2}. \tag{4}$$

Moment setrvačnosti molekuly vody je tedy:

$$J_{\mathrm{H_2O}} = J_{\mathrm{O}} + 2J_{\mathrm{H}} = 2\mu A_r(\mathrm{H}) L^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \tag{5}$$

a kinetická energie rotace je:

$$E_k = \mu A_r(\mathrm{H}) L^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot 4\pi^2 f^2 \tag{6}$$

$$E_k = 1.84 \times 10^{-21}\ \mathrm{J}$$

$$E_k \doteq 0.0125\ \mathrm{eV} = 12.5\ \mathrm{meV} \tag{7}$$

Příklad 3

Zadání: Posilovací náčiní (viz obrázek) se skládá ze tří stejných pružin. Zavěsíme-li na jednu pružinu závaží o hmotnosti 2 kg a rozkmitáme ji, bude perioda kmitů 0.3 s.
Jakou celkovou silou musíme působit na náčiní, aby se prodloužilo o 8 cm, skládá-li se z: (a) 1 pružiny, (b) 2 pružin, (c) 3 pružin.

Řešení: Perioda T kmitů pružiny o tuhosti k je dána jako:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \tag{1}$$

tuhost pružiny k je tedy:

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}. \tag{2}$$

Síly, kterými musíme působit na 1, 2 a 3 pružiny, aby se prodloužily o $\Delta L = 8$ cm, jsou dány jako:

$$F_1 = k\Delta L = \frac{4\pi^2 m}{T^2}\Delta L \tag{3}$$
$$F_1 = 70.1 \text{ N}$$

$$F_2 = 2k\Delta L = \frac{8\pi^2 m}{T^2}\Delta L \tag{4}$$
$$F_2 = 140.2 \text{ N}$$

$$F_3 = 3k\Delta L = \frac{12\pi^2 m}{T^2}\Delta L \tag{5}$$
$$F_3 = 210.3 \text{ N}$$

Příklad 4

Zadání: Pohyb tlumeného harmonického oscilátoru je popsán rovnicí:

$$m\ddot{x}(t) + h\dot{x}(t) + kx(t) = 0$$

s konstantami $h = 2.4$ kg s^{-1} a $k = 20$ kg s^{-2}. Vypočítejte frekvenci ω_0 vlastních kmitů a frekvenci ω tlumených kmitů pro:
(a) hmotnost závaží $m_1 = 800$ g
(b) hmotnost závaží $m_2 = 200$ g
(c) hmotnost závaží $m_3 = 50$ g.
Jaký typ pohybu budou konat závaží m_1, m_2 a m_3?

Řešení: Frekvence vlastních kmitů ω_0 a tlumicí koeficient δ jsou dány vztahem:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$\delta = \frac{h}{2m}$$

Pro zadané hodnoty h, k a hmotnosti m_1, m_2 a m_3 jsou ω_0 a δ následující:

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = 5 \text{ s}^{-1} \tag{1}$$
$$\omega_{02} = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = 10 \text{ s}^{-1} \tag{2}$$
$$\omega_{03} = \sqrt{\frac{k}{m_3}} = 20 \text{ s}^{-1} \tag{3}$$
$$\delta_1 = \frac{h}{2m_1} = 1.5 \text{ s}^{-1} \tag{4}$$
$$\delta_2 = \frac{h}{2m_2} = 6 \text{ s}^{-1} \tag{5}$$
$$\delta_3 = \frac{h}{2m_3} = 24 \text{ s}^{-1} \tag{6}$$

Pro hmotnosti závaží m_1 a m_2 je vlastní frekvence větší než tlumicí koeficient $\omega_0 > \delta$ a oscilátor tudíž koná tlumené kmity s frekvencí ω.

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \tag{7}$$
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1} - \frac{h^2}{4m_1}} = 4.77 \text{ s}^{-1} \tag{8}$$
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_2} - \frac{h^2}{4m_2}} = 8 \text{ s}^{-1} \tag{9}$$

Pro hmotnost závaží m_3 je tlumicí koeficient větší než vlastní frekvence $\delta > \omega_0$ oscilátor koná aperiodický pohyb. Frekvence daná rovnicí (7) je imaginární.