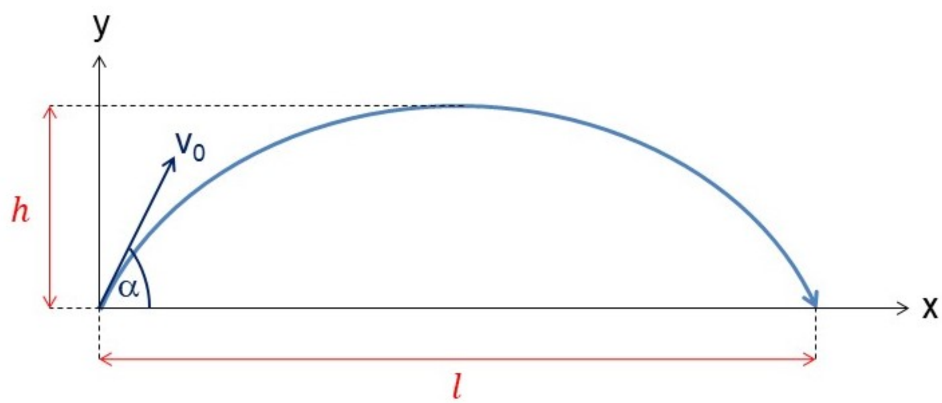
Řešení testu 1

Mechanika a kontinuum
NAFY001

čtvrtek 24. listopadu 2022

Příklad 1

Zadání: Uvažujme obecný šikmý vrh s nulovou počáteční polohou $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ a počáteční rychlostí v_0, jejíž vektor svírá s osou x úhel α.
Nakreslete trajektorii pohybu hmotného bodu.
Vypočítejte vzdálenost l, ve které dopadne hmotný bod na zem, a maximální výšku h, do které vystoupá hmotný bod.
Jaký je poměr doby, po kterou hmotný bod stoupá (doba výstupu), a celkové doby pohybu (doba letu)? Jaký je poměr h/l?



Řešení: Řešení pohybových rovnic pro obecný šikmý vrh se zadanými počátečními podmínkami jsou polohy $x(t)$, $y(t)$ a rychlosti $v_x(t)$ a $v_y(t)$.

$$x(t) = v_0 t \cos\alpha \tag{1}$$
$$y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 \tag{2}$$
$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha \tag{3}$$
$$v_y(t) = v_0 \sin\alpha - g t \tag{4}$$

V nejvyšším bodě parabolické trajektorie (čas t_1) je rychlost $v_y(t_1) = 0$

$$0 = v_0 \sin\alpha - g t_1$$
$$t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \tag{5}$$

a zároveň platí $y(t_1) = h$.

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{g}{2}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g^2}$$
$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \tag{6}$$

V bodě dopadu (čas $t_2 \neq 0$) se nachází hmotný bod v nulové výšce $y(t_2) = 0$

$$
\begin{aligned}
0 &= v_0 t_2 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_2^2 \\
0 &= t_2 \left(v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g t_2 \right) \\
t_2 &= \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

a zároveň platí $x(t_2) = l$.

$$
l = \frac{2 v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} \qquad (8)
$$

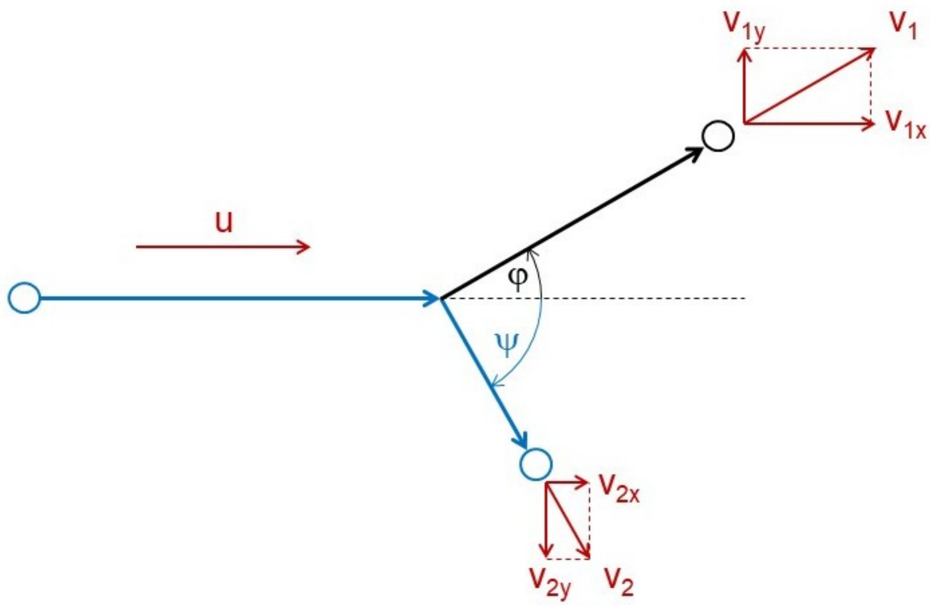
Z rovnic (5) a (7) vidíme, že doba t_2 je přesně 2krát delší než doba t_1. Poměr maximální výšky h a délky vrhu l určíme z rovnic (6) a (8).

$$
\frac{h}{l} = \frac{\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}}{\frac{2 v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}} = \frac{1}{4} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{4} \mathrm{tg}\alpha \qquad (9)
$$

Příklad 2

Zadání: Bílá kulečníková koule narazí do stojící černé koule. Dojde k pružné srážce, po níž se pohybuje černá koule ve směru, který svírá s původním směrem pohybu bílé koule úhel $\varphi = 30°$.
Jaký je po srážce směr pohybu bílé koule?

Poznámka: Uvažujme stejnou hmotnost obou koulí, jejich rozměry a rotaci zanedbáváme.



Řešení: Označme rychlost bílé kulečníkové koule před srážkou jako u, rychlost černé koule po srážce jako v_1 a rychlost bílé koule po srážce jako v_2. Pro pružnou srážku platí zákony zachování hybnosti a mechanické energie. V případě hybnosti se zachovávají její x-ová i y-ová složka, neboli:

$$\begin{aligned} p_{0x} &= p_{1x} + p_{2x} \\ mu &= mv_{1x} + mv_{2x} \\ u &= v_1 \cos\varphi + v_2 \cos\psi \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} p_{0y} &= p_{1y} + p_{2y} \\ 0 &= mv_{1y} - mv_{2y} \\ 0 &= v_1 \sin\varphi - v_2 \sin\psi \end{aligned} \tag{2}$$

V případě energií se zachovávají její kinetické složky, neboli:

$$\begin{aligned} E_{0x} &= E_{k1} + E_{k2} \\ \frac{1}{2}mu^2 &= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \\ u^2 &= v_1^2 + v_2^2 \end{aligned} \tag{3}$$

Dosadíme za úhel $\varphi = 30°$, přepíšeme rovnice (1) a (2), vyjádříme rychlosti u a v_1 a dosadíme do rovnice (3).

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2} v_1 + v_2 \cos\psi$$
$$v_1 = 2 v_2 \sin\psi \tag{4}$$

$$\Rightarrow u = \left(\sqrt{3}\sin\psi + \cos\psi\right) v_2 \tag{5}$$

$$\left(\sqrt{3}\sin\psi + \cos\psi\right)^2 v_2^2 = (2 v_2 \sin\psi)^2 + v_2^2$$

$$3\sin^2\psi + 2\sqrt{3}\sin\psi\cos\psi + \cos^2\psi = 4\sin^2\psi + 1$$
$$2\sqrt{3}\sin\psi\cos\psi = \sin^2\psi + 1 - \cos^2\psi$$
$$\sqrt{3}\sin\psi\cos\psi = \sin^2\psi \tag{6}$$

Poslední rovnici má řešení pro úhel $\psi = 0°$, který odpovídá triviálnímu případu $v_1 = 0$ a $u = v_2$, kdy bílá koule předá černé kouli veškerou svou hybnost a kinetickou energii a sama se po srážce zastaví. Netriviální řešení rovnice (6) je následující:

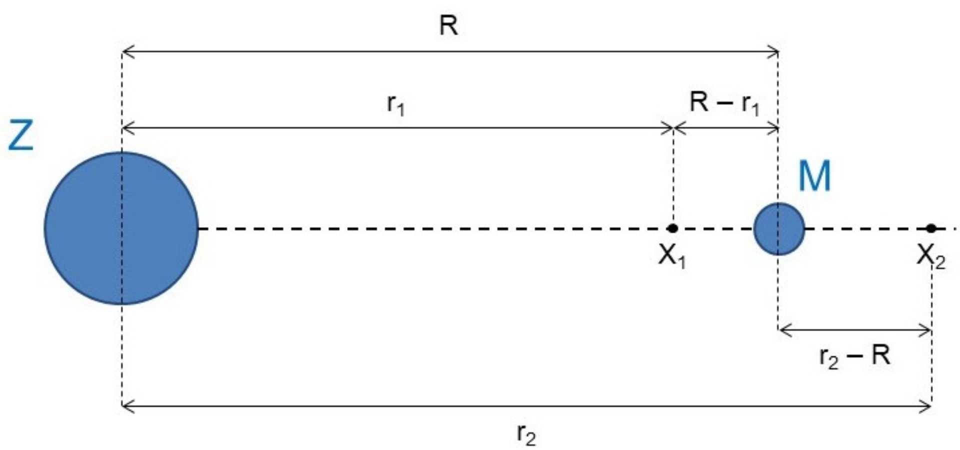
$$\sqrt{3}\cos\psi = \sin\psi$$
$$\sqrt{3} = \mathrm{tg}\psi \tag{7}$$
$$\psi = 60° \tag{8}$$

Tomuto řešení odpovídají rychlosti $v_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} u$ a $v_2 = \frac{1}{2} u$.

Příklad 3

Zadání: Uvažujme družici o hmotnosti m, která se pohybuje ve společném gravitačním poli Země a Měsíce. Hledejme body na spojnici středu Země a Měsíce, v nichž mají gravitační síly, kterými působí Země a Měsíc na družici, stejnou velikost.
(a) V jaké vzdálenosti od (středu) Země mají obě gravitační síly stejnou velikost a opačný směr?
(b) V jaké vzdálenosti od (středu) Země mají obě gravitační síly stejnou velikost a stejný směr?

Poznámka: Střední vzdálenost (středů) Země a Měsíce je $R = 384\,400$ km, poměr hmotností Měsíce a Země je $\frac{M_M}{M_Z} = \frac{1}{81}$.



Řešení: Velikost gravitační síly, kterou působí Země na družici, je rovna:

$$F_{gZ} = \frac{\kappa M_Z m}{r^2}, \tag{1}$$

podobně můžeme napsat velikost gravitační síly, kterou na družici působí Měsíc:

$$F_{gM} = \frac{\kappa M_M m}{(R - r)^2} = \frac{\kappa M_M m}{(r - R)^2}. \tag{2}$$

Hledáme body X_1 a X_2, dané vzdálenostmi r_1 a r_2 od středu Země, ve kterých mají síly F_{gZ} a F_{gM} stejnou velikost.

$$\frac{\kappa M_Z m}{r^2} = \frac{\kappa M_M m}{(R-r)^2}$$

$$(R-r)^2 = \frac{M_M}{M_Z} r^2$$

$$R - r = \pm\sqrt{\frac{M_M}{M_Z}} r$$

$$r_1 = \frac{R}{1 + \sqrt{\frac{M_M}{M_Z}}} \tag{3}$$

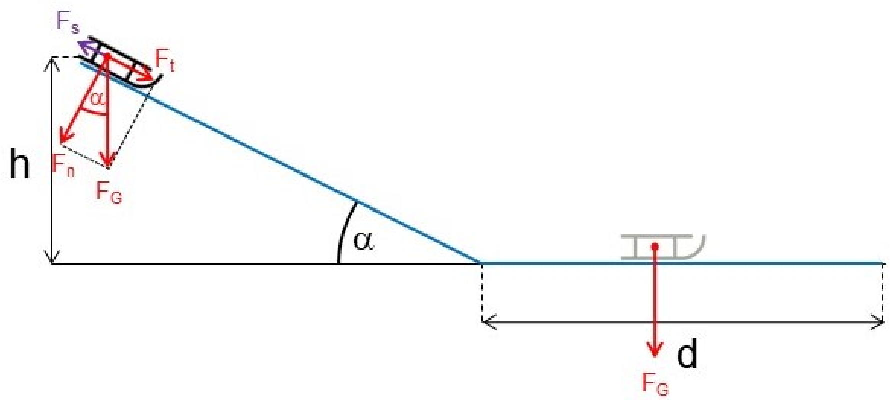
$$r_1 = \frac{9}{10} R = 345\,960 \text{ km} \tag{4}$$

$$r_2 = \frac{R}{1 - \sqrt{\frac{M_M}{M_Z}}} \tag{5}$$

$$r_2 = \frac{9}{8} R = 432\,450 \text{ km} \tag{6}$$

Příklad 4

Zadání: Sáňkař sjíždí z kopce se sklonem $\alpha = 20°$ z výšky $h = 10$ m podle obrázku. Vypočítejte, jakou vzdálenost d urazí na rovince, je-li koeficient smykového tření mezi sáněmi a sněhem $f = 0.1$.



Řešení: Při jízdě z kopce působí ve směru pohybu sáňkaře tečná složka tíhové síly F_t a proti směru jeho pohybu třecí síla F_s.

$$F_{t1} = F_G \sin\alpha = mg \sin\alpha$$
$$F_{s1} = fF_{n1} = fF_G \cos\alpha = fmg \cos\alpha$$

Z druhého Newtonova zákona můžeme vypočítat zrychlení sáňkaře a_1.

$$F_1 = ma_1$$
$$F_1 = F_{t_1} - F_{s1}$$
$$a_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) \tag{1}$$

Sáňkař koná rovnoměrně zrychlený pohyb, jehož dráhu a rychlost popisují následující vztahy.

$$s_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2$$
$$v_1 = a_1 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_1}{a_1}$$
$$s_1 = \frac{v_1^2}{2a_1}$$

Dráhu s_1 můžeme vyjádřit ze známé výšky h a spočítat rychlost v_1 sáňkaře na konci kopce.

$$v_1 = \sqrt{2a_1 s_1}$$
$$v_1 = \sqrt{\frac{2hg}{\sin\alpha}(\sin\alpha - f\cos\alpha)} \tag{2}$$

Při jízdě po rovince působí proti směru pohybu sáňkaře třecí síla F_{s2}.

$$F_{s2} = fF_{n2} = fmg$$

Z druhého Newtonova zákona vypočítáme zrychlení sáňkaře a_2.

$$\begin{aligned} F_2 &= ma_2 \\ F_2 &= F_{s2} \\ a_2 &= fg \end{aligned} \tag{3}$$

Sáňkař koná rovnoměrně zpomalený pohyb, jehož dráhu a rychlost popisují následující vztahy.

$$\begin{aligned} s_2 &= v_1 t_2 - \frac{1}{2} a_2 t_2^2 \\ v_2 &= v_1 - a_2 t_2 \end{aligned}$$

Na konci pohybu je rychlost v_2 nulová. Můžeme si tedy vyjádřit čas t_2 a dopočítat dráhu $s_2 = d$.

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{v_1}{a_2} \\ d &= \frac{v_1^2}{a_2} - \frac{v_1^2}{2a_2} \\ d &= \frac{v_1^2}{2a_2} \\ d &= \frac{2hg}{2gf \sin\alpha}(\sin\alpha - f\cos\alpha) \end{aligned}$$

$$d = \frac{h}{f} - h\,\mathrm{cotg}\alpha \tag{4}$$

$$d = 72.5 \text{ m} \tag{5}$$